

Jacques OZANAM

Récréations mathématiques



LES CLASSIQUES KANGOUROU
ACL - les Éditions du Kangourou

RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES,

QUI CONTIENNENT les Problèmes & les Questions les plus remarquables, & les plus propres à piquer la curiosité, tant des Mathématiques que de la Physique; le tout traité d'une manière à la portée des Lecteurs qui ont seulement quelques connoissances légères de ces Sciences.

*Par feu M. OZANAM, de l'Académie royale
des Sciences, &c.*

NOUVELLE EDITION, totalement refondue & considérablement
augmentée par M. de C. G. F.

TOME PREMIER,
Contenant L'ARITHMÉTIQUE & la GÉOMÉTRIE.



A PARIS, RUE DAUPHINE,
Chez CL. ANT. JOMBERT, fils aîné, Libraire du Roi
pour le Génie & l'Artillerie.

M. DCC. LXXVIII.
AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.

Ce classique Kangourou (n° 2)
contient des extraits de l'ouvrage ci-dessus, choisis,
présentés et commentés par André DELEDICQ.

Au sujet de Jacques Ozanam

Jacques Ozanam est né en 1640 à Bouligneux, dans les Dombes, région marécageuse au nord-est de Lyon. L'assainissement de ces marécages fut d'abord envisagé par le baron de Malavoy, courtisan de Louis XVI (comme cela est évoqué dans le film *Ridicule*) puis accompli seulement à la fin du XIX^e siècle ; c'est aujourd'hui une belle réserve habitée et traversée par toutes sortes d'oiseaux.

Heureusement pour Jacques, il partit étudier la théologie à Lyon, où il s'intéressa plutôt aux soirées galantes, au jeu et aux mathématiques.

Très jeune, il trouva suffisamment d'appui pour « monter » à Paris, où il put donner assez de cours de mathématiques pour y vivre dans l'aisance. Il se maria alors avec une charmante et pieuse jeune fille qui l'assagit avec bonheur et lui donna douze enfants. Il vécut de sa plume et de son talent de vulgarisateur, jusqu'à sa mort due à une crise d'apoplexie en 1717.

Comme le montre les éditions répétées de ses livres, certaines bien après sa mort, le succès de ces ouvrages fut énorme, en particulier son *Dictionnaire mathématique* et ses *Récréations mathématiques et physiques*.

Principaux ouvrages de Jacques Ozanam

Méthode pour tracer les cadrans (éditions de 1673, 1685 et 1730)

Usage du compas de proportion (1688, 1691, 1700, 1736, 1748, 1794)

Dictionnaire mathématique, ou idées générales des mathématiques (1691)

Cours de mathématique, qui comprend toutes les parties les plus utiles et les plus nécessaires à un homme de guerre et à tous ceux qui se veulent perfectionner dans les mathématiques (1693)

Récréations mathématiques et physiques (1694, 1696, 1698, 1720, 1725, 1735, 1778, 1790).

Traduit en anglais dès 1708 à Londres, puis à Dublin en 1756 sous le titre *Recreations in Mathematics for Gentlemen and Ladies*, il y fut réédité en 1803, 1814, 1840 et 1844, avec des suppléments de Edward Riddle. L'édition de 1778 a été revue et complétée par Jean-Étienne Montucla (1725-1799), le fameux auteur de la première *Histoire des mathématiques* parue en français (1758). Les passages reproduits dans ce petit classique *mathématique Kangourou* sont extraits des éditions de 1778 et 1790, qui sont presque identiques.



SOMMAIRE

- p. 2 **Au sujet de Jacques Ozanam**
- p. 4 **Récréations mathématiques :
un bref historique**
- p. 10 **Préface de l'édition de 1778**
- p. 14 **Des progressions arithmétiques et géométriques**
 - p. 20 Notes et commentaires
- p. 22 **Des combinaisons et changements d'ordre**
 - p. 24 Notes et commentaires
- p. 25 **Quelques jeux arithmétiques de divination
et de combinaisons**
 - p. 40 Notes et commentaires
- p. 46 **Divers problèmes arithmétiques curieux**
 - p. 59 Notes et commentaires

Liste des problèmes choisis :

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| 1. Le panier de cailloux | 15. Le riche et les pauvres |
| 2. Achille et la tortue | 16. La fontaine au lion |
| 3. Jeu d'Échecs et grains de blés | 17. L'âne et le mulet |
| 4. Sept personnes à table | 18. Les 3 Grâces et les 9 Muses |
| 5. Deviner le pair ou l'impair | 19. Les disciples de Pythagore |
| 6. Qui a pris quoi ? | 20. Quelle heure est-il ? |
| 7. Quinze Chrétiens et quinze Turcs | 21. L'építaphe de Diophante |
| 8. Le loup, la chèvre et le chou | 22. Le bassin des 3 Amours |
| 9. Trois maris jaloux | 23. Le partage de livres |
| 10. Les religieuses dissipées | 24. Le péage des œufs |
| 11. Transvasements | 25. Les dons circulaires |
| 12. Le parcours du cavalier | 26. Le marchand de vin |
| 13. Tonneaux pleins ou vides | 27. Le sommelier infidèle |
| 14. Le testament du père | 28. Les travailleurs simultanés |

© 2010, A.C.L. - Les éditions du Kangourou.

Extraits choisis et commentés par *André Deledicq*, agrégé de mathématiques, ingénieur informaticien, prix Erdős 2004, en collaboration avec *J.-Philippe Deledicq*, ingénieur des mines. Dessins de *Raoul Raba*, prix de Rome 1955.



Récréations mathématiques : un bref historique

Depuis que les hommes écrivent, ils se posent des petits problèmes, plus ou moins amusants, qui leur font utiliser les mathématiques, pour leur simple plaisir ou pour les besoins de leur enseignement...

Sur les tablettes d'argile gravées par les Babyloniens, vers 1800-1500 avant J.-C., on trouve ainsi des problèmes de longueurs, de poids, de surface ou d'héritage, comme celui-ci :

*Dix frères, soixante sicles et deux tiers de soixante sicles d'argent !
Chaque frère obtient pareillement plus que son frère juste plus jeune ;
la part du huitième frère est de 5 sicles. Combien chaque frère a-t-il
obtenu de plus que son suivant ; et combien ont-ils obtenu chacun ?*

Si le plus jeune frère a obtenu x et que chacun a obtenu z de plus que son suivant, les frères ont obtenu en tout :

$$x + (x + z) + (x + 2z) + (x + 3z) + (x + 4z) + (x + 5z) + (x + 6z) \\ + (x + 7z) + (x + 8z) + (x + 9z)$$

soit $10x + 45z$ qui vaut 100 d'après l'énoncé (les Babyloniens comptaient en base 60). Et le huitième frère a obtenu $x + 2z = 5$, d'où $x = 5 - 2z$; on a donc $10(5 - 2z) + 45z = 100$, d'où $25z = 50$ et $z = 2$, d'où $x = 1$.

Les dix frères ont donc obtenu chacun 1 sicle, 3 sicles, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 et 19 sicles.

Le premier grand livre de problèmes mathématiques connu est l'œuvre de Diophante d'Alexandrie : *Les Arithmétiques*. On ne sait pas très bien quand vivait ce mathématicien (autour de 400 après J.-C.) mais son livre eut presque autant de succès que *Les éléments* d'Euclide ; c'est en effet dans les marges de ses éditions successives que les plus grands mathématiciens, qui le lisaient, ont noté leurs remarques et leurs interrogations. Ainsi faisaient par exemple, Gaspar Bachet ou Pierre de Fermat, au XVII^e siècle.

Les 189 problèmes de Diophante posent presque tous une question comportant un nombre inconnu, qu'il s'agit de trouver.

Diophante donne, de chacun, une solution en décrivant les calculs pour la trouver, de sorte que l'on a pu y voir les débuts de ce qui sera,



plus tard, l'Algèbre ; cependant, il n'écrit jamais aucune formule et il ne fait que détailler les suites de calculs à mener.

Voici, par exemple, le premier problème que l'on trouve dans ses *Arithmétiques* :

Partager un nombre proposé en deux nombres dont la différence est donnée. Que le nombre donné soit 100, et que la différence soit 40 unités ; trouver les nombres.

Vous pouvez lire ci-dessous la solution : à gauche, décrite par Diophante (il y désigne le nombre inconnu dont il veut trouver la valeur par le mot « arithme ») et, à droite, avec nos notations modernes.

Que le plus petit nombre soit 1 arithme.

Donc le plus grand nombre sera alors
1 arithme plus 40 unités.

La somme des deux nombres devient
2 arithmes plus 40 unités.

Or les 100 unités données sont cette somme ;
donc 100 unités sont égales à 2 arithmes plus
40 unités.

Retranchons les semblables des semblables,
c'est-à-dire 40 unités de 100 et, de même, 40
unités de 2 arithmes plus 40 unités.

Les deux arithmes restants valent 60 unités, et
chaque arithme devient 30 unités.

Revenons à ce que nous avons posé :

le plus petit nombre sera 30 unités ; tandis que
le plus grand sera 70 unités.

Soit x

et $x + 40$ les deux
nombres cherchés.

$$x + (x + 40) = 2x + 40.$$

$$2x + 40 = 100$$

$$- 40$$

$$- 40$$

$$2x = 60$$

$$x = 30$$

$$x + 40 = 70.$$

L'Anthologie grecque

Cependant, vers 80 avant J.-C., un poète galiléen, du nom de Méléagre, faisait paraître un recueil de petits poèmes, plus ou moins coquins, sous le nom de *La Couronne* (sous-entendu *de fleurs, tressée par les poètes*). Ce recueil fut perdu, mais cela donna l'idée de réunir des textes courts (des « épigrammes ») susceptibles d'amuser les lecteurs cultivés de l'époque ; ainsi naquit l'*Anthologie grecque* (dite aussi *palatine*), complétée de textes divers au cours des temps.



Traduite par le byzantin Maxime Planude vers 1300, et redécouverte par l'humaniste protestant Claude Saumaise en 1606, elle fut très lue et recopiée pendant de nombreux siècles. C'est dans cet ouvrage que l'on retrouve, par exemple, l'énigme concernant l'âge de la mort de Diophante, donnée page 52.

Nicolas Chuquet (~1450-1488) termina en 1484 l'écriture d'un livre étonnant, intitulé *Triparty en la science des nombres*.

On y trouve à la fois des notations assez géniales comme celle des puissances d'un nombre, des dénominations comme « byllions, tryllions ou quadryllions » pour les 10^{12} , 10^{18} , 10^{24} ... mais aussi des règles algébriques, servant à la résolution de problèmes dont il souligne l'aspect ludique et récréatif.

Ce livre fut entièrement recopié par un de ses élèves, Estienne de la Roche, qui le fit éditer, sous son propre nom en 1520 ; heureusement le manuscrit original fut redécouvert et publié en 1880.

La troisième partie de ce livre traite des manipulations d'équations permettant de trouver la valeur d'un nombre inconnu, notée par lui 1^1 et appelée « premier (nombre) » à trouver. Il développe ainsi sa *Règle des premiers* en soulignant l'excellence de cette règle qui est la clef, l'entrée et la porte des abîmes qui sont en la science des nombres.

Voici, pour le plaisir et l'élégance du choix des nombres, l'un des 156 problèmes qu'il résout ainsi :

Trois hommes possèdent chacun quelques pièces de monnaie dans leurs bourses ; si le premier prenait 12 pièces aux deux autres, il aurait 2 fois plus que ce qui leur resterait alors, plus 6 pièces. Mais si le deuxième prenait 13 pièces aux deux autres, il aurait 4 fois plus que ce qui leur resterait alors, plus 2 pièces ; et si le troisième prenait 11 pièces aux deux autres, il aurait 3 fois plus que ce qui leur resterait alors, plus 3 pièces. Combien de pièces chaque homme possède-t-il ? Si nous appelons x, y, z le nombre de pièces en possession de chaque homme, on peut ainsi traduire les trois phrases de l'énoncé :

$$x + 12 = 2(y + z - 12) + 6 \text{ soit } -x + 2y + 2z = 30 ;$$

$$y + 13 = 4(x + z - 13) + 2 \text{ soit } 4x - y + 4z = 63 ;$$

$$z + 11 = 3(y + x - 11) + 3 \text{ soit } 3x + 3y - z = 41.$$

En ajoutant 4 fois la première équation à la deuxième, on obtient :



$$(E1) \quad 7y + 12z = 183.$$

Et en ajoutant 3 fois la première équation à la troisième, on obtient :

$$(E2) \quad 9y + 5z = 131.$$

Et en soustrayant 5 fois E1 de 12 fois E2, on obtient :

$$73y = 657, \text{ soit } y = 9.$$

D'où on déduit $81 + 5z = 131$, soit $5z = 50$ donc $z = 10$.

Et finalement $3x + 27 - 10 = 41$, soit $3x = 24$, donc $x = 8$.

Les trois hommes avaient donc respectivement 8, 9 et 10 pièces !

Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1581-1638) publie en 1612 un ouvrage intitulé *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres, partie recueillis de divers auteurs et partie inventés de nouveau avec leurs démonstrations*. On y trouve de nombreux problèmes, plus ou moins délectables, empruntés à différentes publications précédentes, mais aussi de véritables mathématiques comme par exemple le joli résultat qu'on appelle aujourd'hui « théorème de Bachet-Bézout » :

Si deux nombres positifs a et b sont premiers entre eux, alors il existe deux autres entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$. Inversement, s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$, alors c'est que a et b sont premiers entre eux.

Citons le problème suivant dont la solution trouve un bien curieux éclairage dans l'écriture des nombres en base 3 :

Étant donnée telle quantité qu'on voudra pesant un nombre de livres depuis 1 jusques à 40 inclusivement (sans toutefois admettre les fractions), on demande combien de poids pour le moins il faudrait employer à cet effet ?

Que peut-on peser avec n poids ?

Chacun des n poids peut être soit sur la balance, et alors il peut être sur un plateau ou sur l'autre, soit ne pas être sur la balance. Cela fait 3 possibilités pour chacun des n poids, soit 3^n possibilités au total, ou plutôt $3^n - 1$ en enlevant la possibilité de ne mettre aucun poids sur la balance.

Si la balance est en équilibre avec ces poids et un certain objet, on connaît alors le poids de cet objet.

Évidemment on pourrait peser ce même objet, une deuxième fois, avec les mêmes poids, en échangeant tout simplement ce qu'il y a sur les deux plateaux



de la balance. Finalement, avec n poids, on peut peser au maximum $(3^n - 1)/2$ objets de poids différents ; et ceci à condition que toutes les combinaisons possibles de ces n poids sur les deux plateaux de la balance mesurent (par différence) des poids différents !

Il se trouve que cette condition est réalisée si on prend pour n poids, les n premières puissances de 3, c'est-à-dire 1, 3, 9, 27, ..., 3^{n-1} .

(Pour les curieux, la vérification de cette condition se déduit facilement de la possibilité d'écrire tout nombre entier « en base 3 », c'est-à-dire de l'écrire de manière unique comme somme de puissances de 3, chacune multipliée par 0, 1 ou 2.)

Finalement, on peut peser jusqu'à $1 + 3 + 9 + \dots + 3^{n-1} = (3^n - 1)/2$ avec n poids.

Ainsi, avec les 2 poids de 1g et 3g, on peut peser tout objet de 1 à 4g.

Et, avec les 3 poids de 1g, 3g et 9g on peut peser tout objet de 1 à 13g.

Comme ceci (A note un objet de 1g, B de 2g, ...) :

A = 1g	B + 1g = 3g	C = 3g
D = 1g + 3g	E + 1g + 3g = 9g	F + 3g = 9g
G + 3g = 1g + 9g	H + 1g = 9g	I = 9g
J = 1g + 9g	K + 1g = 3g + 9g	L = 3g + 9g
M = 1g + 3g + 9g.		

Et, avec les 4 poids de 1g, 3g, 9g, et 27g on peut peser tout objet de 1 à 40g.

Par exemple pour peser un objet T de 20g : $T + 1g + 9g = 3g + 27g$.

Claude Mydorge (1585-1647) ami de Descartes, pour lequel il avait fait tailler des lentilles optiques, publia en 1630 un *Examen du livre des récréations mathématiques*. Il y reprend un *Entretien facétieux sur plusieurs problèmes d'arithmétique et de géométrie*, de son ami Jean Leurechon qui inspira *Les récréations mathématiques* de Denis Henrion (1659). Ainsi furent publiés, pendant tout le XVII^e siècle, de nombreux livres de *Récréations mathématiques*.

L'ouvrage dont nous avons décidé de donner quelques extraits, dans ce « classique Kangourou », est donc en grande partie la compilation de textes déjà parus. Réunis par Jacques Ozanam en 1694, ces *Récréations mathématiques* furent le véritable premier grand succès éditorial de ce type d'ouvrage. Comme ses précédents, cet ouvrage fut ensuite largement recopié et complété.



Vers la fin du XIX^e siècle, on vit apparaître de nouveaux auteurs et de nouveaux livres sur le sujet. Citons les plus importants :

Édouard Lucas (1842-1891) écrivit 4 tomes de ses *Récréations mathématiques* (1891) et *L'arithmétique amusante* (1895).

Sam Loyd (1841-1911), inventeur du *Taquin* et de multiples autres puzzles, a écrit et diffusé des milliers de problèmes et de puzzles, réunis en 1914 sous le titre *Cyclopedia of Puzzles*.

Rouse Ball (1850-1925) vit son *Mathematical Recreations and Essays* (1892) de nombreuses fois réédité et traduit.

Émile Fourrey (1869-?) proposa deux « sommes » remarquables : *Récréations arithmétiques* (1899), *Curiosités géométriques* (1907).

Henry Ernest Dudeney (1857-1930) fut certainement le plus prolifique de tous les auteurs de problèmes : *The Canterbury Puzzles* (1907), *Amusements in Mathematics* (1917), *The World's Best Word Puzzles* (1925), *Modern Puzzles* (1926), *Puzzles and Curious Problems* (1931).

Maurice Kraitchik (1882-1957) créa, en 1931 à Bruxelles, la revue *Sphinx*, revue mensuelle des questions récréatives. Il réunit la quasi-totalité de ce qu'il avait lu sur le sujet dans *La mathématique des Jeux ou Récréations Mathématiques* (1930).

André de Sainte-Laguë (1882-1950) fut le premier responsable de la Section de Mathématiques au Palais de la Découverte à son ouverture en 1937. Il écrivit quelques livres remarquables, montrant les relations entre les problèmes des anciens et certaines théories modernes (comme, par exemple la *Théorie des Graphes* qu'il initie dans *Avec des nombres et des lignes*).

Martin Gardner (1914-) fut collaborateur de la revue mensuelle *Scientific American* ; il en tint la rubrique *Mathematical Games* pendant 25 ans (de 1957 à 1982) et publia de nombreux ouvrages, fruits de la correspondance qu'il entretenait avec la plupart des grands mathématiciens de son époque.

A. D.



P R É F A C E.

QUOIQUE les Mathématiques soient vulgairement & avec quelque raison réputées les plus épineuses des connoissances humaines, tous ceux qui y sont même légèrement initiés, ne sauroient disconvenir qu'elles présentent un grand nombre de questions sur les nombres, & sur l'étendue, (sans parler des Mathématiques mixtes, comme l'Optique, la Mécanique, l'Astronomie, &c.) qui, sans être d'un degré de difficulté capable de beaucoup occuper un esprit cultivé, sont propres à piquer sa curiosité, soit par leur solution, soit par les moyens dont on a pu y parvenir. Nous ne prétendons pas que des esprits, uniquement accoutumés à des lectures légères ou frivoles, & qui n'ont pas même les connoissances élémentaires des sciences exactes, puissent trouver dans ces questions de quoi les intéresser & les amuser. Mais, comme il entre aujourd'hui, non-seulement dans toute éducation recherchée, mais même dans l'éducation publique, de donner des idées au moins élémentaires & superficielles des Mathématiques & de la Physique, il n'y a nul doute qu'il ne se trouve en ce siècle un grand nombre de personnes capables de s'intéresser à un ouvrage qui leur présentera un choix bien fait de ce qu'il y a dans ces sciences de plus curieux par son usage ou sa singularité.



D'ailleurs, il est des esprits de toutes les trempes, comme des caractères & des visages différents. Ce qu'un ordre d'hommes honore d'une profonde indifférence, d'autres en font leurs délices. C'est en cela que consiste l'harmonie de l'univers.

Nous ajouterons que jamais les Mathématiques & la Physique ne furent plus cultivées qu'elles le sont actuellement. Or, il y a deux classes de personnes qui les cultivent : les unes par état, ou par le désir de s'illustrer en reculant leurs limites; les autres par pur amusement, ou par un goût naturel qui les porte vers ce genre de nos connoissances. Ce sera, si l'on veut, à cette dernière classe de Mathématiciens & de Physiciens que cet ouvrage sera destiné; quoique nous ne renoncions pas à intéresser en quelques endroits ceux de la première. Enfin, il peut servir à aiguillonner l'esprit de ceux qui commencent à étudier ces sciences; & c'est-là la raison pour laquelle, dans la plupart des livres élémentaires, on tâche d'envelopper les questions proposées pour exercer les commençans, d'un énoncé moins abstrait que celui des Mathématiques pures, & qui puisse intéresser & piquer la curiosité. Si, par exemple, on proposoit simplement de diviser un triangle en 3, 4 ou 5 parties égales, par des lignes tirées d'un point déterminé au dedans de ce triangle, il n'y a guère que ceux qui sont vraiment doués du goût de la



Géométrie qui y prissent intérêt. Mais si , au lieu de proposer le problème de cette manière abstraite , on disoit : *Un père de famille laisse en mourant à ses trois fils, un champ triangulaire à se partager entre eux également ; il y a dans ce champ un puits qui doit être commun aux trois co-héritiers ; ce qui nécessite que les lignes de division partent de ce point : comment feront-ils pour se conformer à la volonté du testateur ?* cet exposé fera sans doute désirer à la plupart des esprits de connoître la manière d'y parvenir ; & pour peu qu'on soit doué du goût des sciences exactes , on sera tenté d'exercer ses forces à la trouver. [...]

Les Grecs nous ont donné le premier exemple de ces jeux mathématiques. Car on trouve dans l'Anthologie grecque , un grand nombre d'épigrammes qui ne sont que des questions arithmétiques ; telles sont la fameuse question de l'*Ane* & du *Mulet* ; celle de l'*Amour* remplissant en différens temps , par divers canaux , la capacité d'un bassin , &c. [...]

Ce sont , à ce qu'il paroît , ces questions & les considérations précédentes , qui engagèrent M. Bachet de Méziriac , d'ailleurs célèbre algébriste , ainsi qu'on le voit par ses commentaires sur Diophante , à recueillir un grand nombre de questions sur les nombres , qu'il publia en 1626 , & qu'il intitula *Problèmes plaisans & délectables sur les Nombres*. Ce livre est , après les problèmes de l'Anthologie grecque ,



le premier germe de toutes les *Récréations Mathématiques* qui ont paru dans la suite, plus ou moins augmentées, & en différentes langues. [...]

Si le grand nombre des éditions d'un ouvrage est une preuve incontestable de sa bonté & de son utilité, les *Récréations Mathématiques & Physiques* de feu M. Ozanam devroient être regardées comme un des livres les meilleurs & les plus utiles qui aient été faits. [...]

A P P R O B A T I O N .

J'AI lu, par ordre de Monseigneur le Garde des Sceaux, les *Récréations Mathématiques & Physiques* de feu M. OZANAM, corrigées & considérablement augmentées : il m'a paru que cet Ouvrage, fort imparfait dans ses éditions antérieures, a acquis dans celle-ci un degré d'amélioration considérable, qui peut lui mériter place parmi les bons livres sur ces matières. Fait à Paris le 5 août 1775.

MONTUCLA, Censeur Royal.

Cette préface, extraite de l'édition de 1778, est écrite par Montucla. Nous avons ajouté l'*Approbation* du *Censeur Royal*, dont le lecteur pourra ainsi apprécier la saveur : cette édition est en effet annoncée « totalement refondue et considérablement augmentée par M. de C. G. F. ». Le pseudo de Montucla (Chanla Géomètre Forézien) était apparemment ignoré de ceux qui le désignèrent comme *Censeur* de son propre ouvrage !

Comme dans les autres Classiques Kangourou, nous avons voulu donner un *fac simile* de quelques pages du livre original ; mais nous avons ensuite préféré réécrire le texte selon les habitudes et une typographie plus proche du lecteur d'aujourd'hui.

Dans la suite de ce livre, tous les textes (hors les *Notes et commentaires* et quelques corrections d'erreurs repérées dans l'ouvrage original) sont d'Étienne Montucla ou de Jacques Ozanam.



Des progressions arithmétiques et géométriques

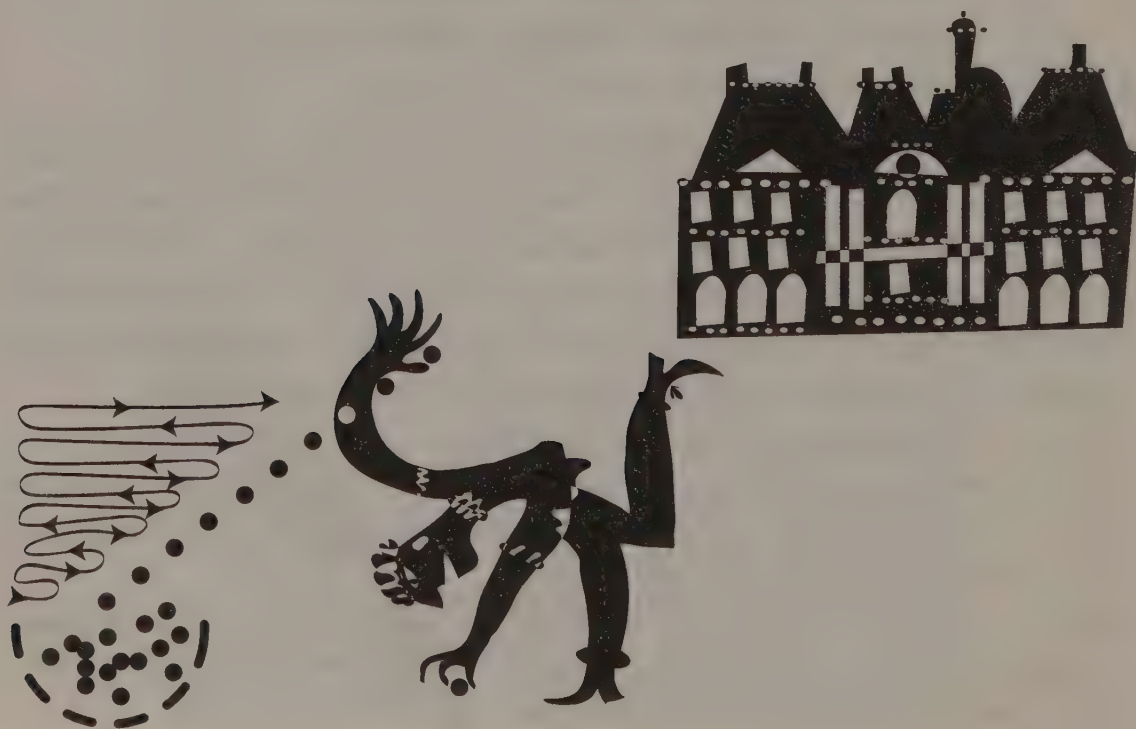
Problème 1

Il y a un panier et cent cailloux rangés en ligne droite et à des espaces égaux d'une toise. On propose de les ramasser et les rapporter dans le panier un à un, en allant d'abord chercher le premier, ensuite le second, et ainsi de suite jusqu'au dernier.

Combien de toises doit faire celui qui entreprend cet ouvrage ?

(Notes et commentaires, page 20)

Il est bien clair que pour le premier caillou il faut faire deux toises, une pour aller, et une pour revenir ; que pour le second il faut faire quatre toises, deux pour aller, deux pour revenir ; et ainsi de suite, en augmentant de deux jusqu'au centième, qui exigera deux cents toises de chemin, cent pour aller, cent pour revenir. Il est d'ailleurs facile d'apercevoir que ces nombres forment une progression arithmétique, dont le nombre des termes est 100 ; le premier 2, et le centième 200. Ainsi la somme totale sera le produit de 202 par 50 ou 10100 toises ; ce qui fait plus de quatre lieues moyennes de France, ou cinq petites lieues.



Remarque

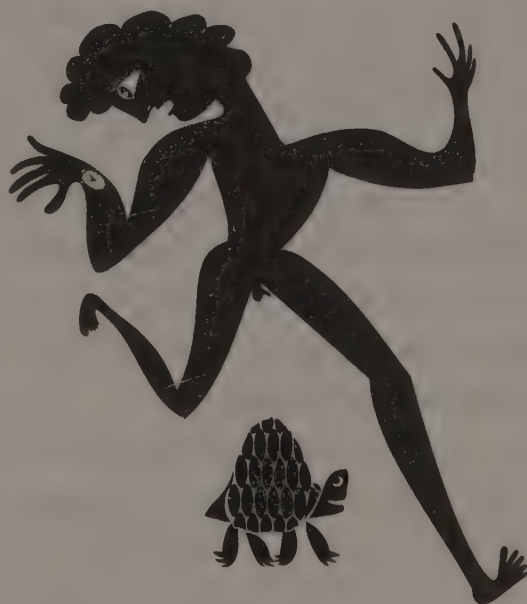
Il n'est pas étonnant que ceux qui n'ont pas de connaissances mathématiques ne se persuadent pas qu'une telle entreprise exige tant de chemin. On a vu, il y a quelques années, au Luxembourg, une personne parier qu'elle irait de ce palais au château de Meudon toucher la grille d'entrée, et reviendrait au Luxembourg, avant qu'une autre eût ramassé cent pierres espacées comme ci-dessus, et sous les mêmes conditions. Cette dernière ne pouvait se le persuader, et gagea une somme assez forte ; mais elle perdit. Et en effet elle devait perdre ; car je doute qu'il y ait du Luxembourg à Meudon 5050 toises, ce qui en fait pour aller et revenir 10100. Or celui qui allait à Meudon avait, sur celui qui ramassait les pierres, l'avantage de n'avoir pas à se baisser cent fois de suite et se relever autant de fois ; ce qui devait extrêmement ralentir son opération. Aussi la première fut-elle de retour, à ce qu'on m'a raconté, que l'autre était à peine à la quatre-vingt-cinquième pierre.

Problème 2

Achille va dix fois plus vite qu'une tortue qui a un stade d'avance. On demande s'il est possible qu'il l'atteigne, et à quelle distance il l'atteindra ?

(Notes et commentaires, page 20)

Cette question n'a de la célébrité que parce que Zénon, chef des Stoïciens, prétendait, par un sophisme, prouver qu'Achille n'atteindrait jamais la tortue : car, disait-il, pendant qu'Achille fera un stade, la tortue en aura fait un dixième ; et pendant qu'il fera ce dixième, la tortue en fera un centième qu'elle aura encore d'avance ; et ainsi à l'infini : par conséquent il s'écoulera un nombre infini d'instantes avant que le héros ait atteint le reptile : donc il ne l'atteindra jamais.



Il ne faut cependant qu'avoir le sens commun pour voir qu'Achille atteindra bientôt la tortue, puisqu'il la dépassera. D'où vient donc le sophisme ? Le voici.

Achille n'atteindrait en effet jamais la tortue, si les intervalles de temps pendant lesquels on suppose qu'il a fait le premier stade, et ensuite les dixième, centième, millième de stades que la tortue a eu successivement d'avance sur lui, étaient égaux ; mais en supposant qu'il ait fait le premier stade dans 10 minutes de temps, il ne mettra qu'une minute à parcourir un dixième de stade, ensuite 1/10ème de minute pour parcourir un centième, etc. : ainsi les intervalles de temps qu'Achille emploiera à parcourir l'avance que la tortue a gagnée pendant le temps précédent, iront en décroissant de cette manière, 10, 1, 1/10, 1/100, 1/1000, etc. ce qui forme une progression géométrique sous-décuple, dont la somme est égale à 11,11111...

C'est l'intervalle de temps après lequel Achille aura atteint la tortue.

Problème 3

Un homme ayant fait quelque chose de fort agréable à un souverain, celui-ci veut le récompenser, et lui ordonne de faire la demande qu'il voudra, lui promettant qu'elle lui sera accordée.

Cet homme qui est instruit dans la science des nombres, se borne à supplier le monarque de lui faire donner la quantité de blé qui proviendrait en commençant par un grain, et en doublant, soixante-trois fois de suite.

On demande quelle est la valeur de cette récompense ?

(Notes et commentaires, page 21)



Un auteur arabe, Al-Sephadi, raconte l'origine de ce problème d'une manière assez curieuse pour trouver place ici. Un roi de Perse, dit-il, ayant imaginé le jeu de Tric-trac, en était tout glorieux. Mais il y avait dans les États d'un roi de l'Inde un mathématicien nommé Sessa, fils de Daher, qui inventa le jeu d'Échecs. Il le présenta à son maître qui en fut si satisfait, qu'il voulut lui en donner une marque digne de sa magnificence, et lui ordonna de demander la récompense qu'il voudrait, lui promettant qu'elle lui serait accordée. Le mathématicien se borna à demander un grain de blé pour la première case de son échiquier, deux pour la seconde, quatre pour la troisième, et ainsi de suite, jusqu'à la dernière soixante-quatrième. Le prince s'indigna presque d'une demande qu'il jugeait répondre mal à sa libéralité, et ordonna à son vizir de satisfaire Sessa. Mais quel fut l'étonnement de ce ministre, lorsqu'ayant fait calculer la quantité de blé nécessaire pour remplir l'ordre du prince, il vit que non seulement il n'y avait pas assez de grains dans ses greniers, mais même dans tous ceux de ses sujets et dans toute l'Asie ! Il en rendit compte au roi, qui fit appeler le mathématicien, et lui dit qu'il reconnaissait n'être assez riche pour remplir sa demande, dont la subtilité l'étonnait encore plus que l'invention du jeu qu'il lui avait présenté.

Telle est, pour le remarquer en passant, l'origine du jeu d'Échecs, du moins au rapport de l'historien arabe Al-Sephadi. Mais ce n'est pas ici notre objet de discuter ce qui en est : occupons-nous du calcul des grains demandés par le mathématicien Sessa.

On trouve en calculant, que le soixante-quatrième terme de la progression double en commençant par l'unité, est le nombre

9 223 372 036 854 775 808.

Or dans la progression double commençant par l'unité, la somme de tous les termes se trouve en doublant le dernier et en ôtant l'unité. Ainsi le nombre de grains de blé nécessaire pour remplir la demande de Sessa, était le suivant, 18 446 744 073 709 551 615. Or l'on trouve qu'une livre de blé de médiocre grosseur et médiocrement sec contient environ 12 800 grains, et conséquemment le setier de blé, qui est de 240 livres poids moyen, en contiendrait environ 3 072 000 ; je le suppose de 3 100 000 : divisant donc le nombre des grains trouvés ci-dessus par ce dernier nombre, il en résulterait 5 950 562 604 422 setiers, qu'il eût fallu pour acquitter la promesse du roi indien.



En supposant encore qu'un arpent de terre ensemencé rendît cinq setiers, il faudrait, pour produire en une année la quantité de setiers ci-dessus, la quantité de 1 190 112 408 884 arpents ; ce qui fait près de huit fois la surface du globe terrestre : car la circonférence de la terre, étant supposée de 9000 lieues moyennes, sa surface entière, y comprise celle des eaux de toute espèce, se trouve de 148 882 176 000 arpents. (...)

Terminons par quelques remarques physico-mathématiques, sur la prodigieuse fécondité, et la multiplication progressive des animaux et des végétaux, qui aurait lieu si les forces de la nature n'éprouvaient pas continuellement des obstacles. (...)

Quelle ne serait pas la multiplication de plusieurs animaux, si la difficulté de la subsistance, si la guerre que les uns font aux autres, ou la consommation qu'en font les hommes, ne mettaient pas des bornes à leur propagation ? Il est aisé de démontrer que la race d'une truie qui aurait mis bas six petits, dont deux mâles et quatre femelles, en supposant ensuite chaque femelle mettre bas pareillement chaque année six petits, dont quatre femelles et deux mâles, monterait, après douze ans, à 33 554 230.



Plusieurs autres animaux, comme les lapins, les chats, etc. qui ne portent que pendant quelques semaines, multiplieraient encore avec bien plus de rapidité : la surface de la terre ne suffirait pas, après un demi-siècle seulement, pour leur donner la subsistance, ou même pour les contenir. Il ne faudrait qu'un bien petit nombre d'années pour qu'un hareng

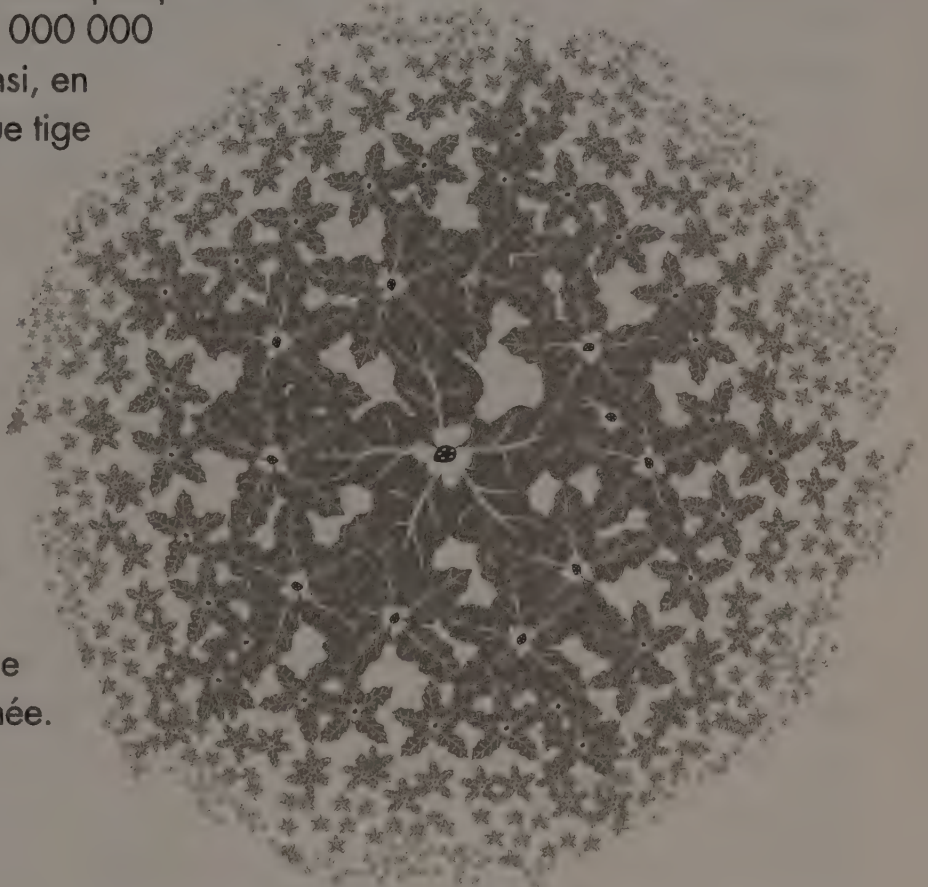


remplît l'Océan de sa postérité, si tous ses œufs étaient fécondés ; car il n'est guère de poisson ovipare qui ne contienne plusieurs milliers d'œufs qu'il jette dans le temps du frai. Supposons que ce nombre monte seulement à 2000, qui donnent naissance à autant de poissons, moitié mâles, moitié femelles : dans la seconde année il y en aurait plus de 200 000 ; dans la troisième, plus de 200 000 000 ; et dans la huitième année ce nombre surpasserait celui qui est exprimé par 2 suivi de 24 zéro. Or la solidité de la terre contient à peine autant de pouces cubes. Ainsi l'Océan, quand bien même, il occuperait toute la surface du globe terrestre et toute sa profondeur, ne suffirait pas pour contenir tous ces poissons.

Plusieurs végétaux couvriraient en très peu d'années toute la surface du globe, si toutes leurs semences étaient mises en terre : il ne faudrait pour cela que quatre ans à la jusquiame, qui est peut-être, de toutes les plantes connues, celle qui donne la plus grande quantité de semences. D'après quelques expériences, on a trouvé qu'une tige de jusquiame donne quelque fois plus de 50 000 grains : réduisons ce nombre à 10000 ; à la quatrième génération il monterait à 1 suivi de 16 zéro. Or la surface de la terre ne contient pas plus de

5 359 758 336 000 000

pieds carrés. Ainsi, en allouant à chaque tige un pied carré seulement, l'on voit que la surface entière de la terre ne suffirait pas pour toutes les plantes provenant d'une seule de cette espèce à la fin de la quatrième année.



NOTES ET COMMENTAIRES – problèmes 1 à 3

problème 1

• La toise est une ancienne unité de mesure qui valait 6 pieds. Selon les villes, le pied pouvait varier du simple au double, entre celui d'Avignon, de Barcelone, d'Amsterdam ou de Varsovie. À la Révolution Française, il fut décidé que le mètre vaudrait 27 706/9 000 Pieds-de-Roi de Paris, ce qui donne exactement 32,484 centimètres pour un Pied-de-Roi. Cela met la toise à environ 2 mètres.

L'histoire ici racontée se passe, à Paris, dans les jardins du Luxembourg (où l'on peut facilement aligner 100 cailloux espacés d'une toise, ce qui représente environ 200 mètres).

Du Palais du Luxembourg au château de Meudon, il y avait alors environ 7 kilomètres et demi (soit environ 3 750 toises). Vous pouvez ainsi vérifier la dernière affirmation de la remarque d'Ozanam.

• Classiquement, il est plus simple de calculer la somme $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$, en écrivant « à l'envers » les termes d'une deuxième somme : $100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1$.

En regroupant alors les termes deux par deux

$$(100 + 1, 99 + 2, 98 + 3, \dots, 3 + 98, 2 + 99, 1 + 100),$$

on obtient 100 fois le même résultat : 101.

La somme vaut donc $100 \times 101/2$, soit 5 050.

La légende dorée des mathématiques raconte que le jeune Karl Friedrich Gauss, alors âgé de 6 ans, en 1783, trouva tout seul cette méthode de calcul, devant son instituteur ébahi...

problème 2

• C'est dans le livre II de *La Physique* d'Aristote, dans le chapitre sur la divisibilité du mouvement, que se trouve exposé et discuté le « paradoxe » de Zénon, philosophe du cinquième siècle avant J.-C. vivant à Élée, au sud de l'Italie, alors partie de la Grande Grèce.

• Le problème a pourtant une réponse simple : supposons qu'Achille parcoure 1 stade en 1 minute ; l'équation liant le temps t , en minutes, à la distance qu'il parcourt en stades est $x = t$; l'équation analogue pour la tortue est $x = 1 + t/10$; lorsque Achille rejoint la tortue, on a donc $t = 1 + t/10$, ce qui donne $t = 10/9$, soit 1 minute et 1 neuvième de minute.

En fait, le temps mis par Achille pour rattraper la tortue est effectivement la somme d'un nombre infini de termes : $1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \dots$



La seule chose à comprendre pour lever le paradoxe est qu'une somme infinie de termes peut très bien être finie ; il suffit pour cela que les termes à additionner deviennent de plus en plus petits, et cela « plus vite » que leur nombre devient grand.

Il est très facile ici d'évaluer la somme cherchée, dans notre système d'écriture décimal : $1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots$, soit $1,111\dots$, nombre qui est exactement le résultat de la division $10/9$; comme on le vérifie en posant simplement la division.

problème 3

- La légende, et même les multiples légendes concernant la création du jeu d'Échecs, se perd dans la nuit des temps...

- Le « soixante-quatrième terme de la progression double commençant par l'unité », donné par Ozanam, est exactement 2^{63} .

Sachant que $1 + 2 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{63}$ vaut $2^{64} - 1$, il annonce que ce nombre vaut un peu plus de 9 milliards de milliards ; et il calcule alors que ce nombre de grains de blé équivaut à environ 6 000 milliards de setiers de blé (un setier de blé vaut à peu près notre quintal)...

Il évalue ensuite la surface qu'il faudrait pour le cultiver (environ 1200 milliards d'arpents) et montre qu'elle est largement supérieure à celle de la Terre (environ 150 milliards d'arpents).

Sachant, en effet, que la surface d'une sphère de circonférence C vaut C^2/π , Ozanam évalue la surface de la Terre à $9000 \times 9000 / \pi$, soit 25 783 000 lieues carrées. Alors, une lieue valant 2280 toises, soit $2280/3$ ou 760 perches, et un arpent valant 100 perches carrées, la surface de la Terre vaut environ $257\,830 \times 760 \times 760$, ce qui est bien très proche du nombre 148 882 176 000 donné dans le texte.

(Notez aussi que, plus loin, Ozanam donne la surface de la Terre égale à 5 359 758 336 000 000 pieds carrés, qui est bien le produit de 148 882 176 000 par 36 000, valeur, en pieds carrés, d'un arpent)

- La rapide croissance des nombres générés par l'opération puissance est ensuite illustrée par le gigantisme des populations engendrées au départ par quelques individus, cochons élevés, prolifiques poissons ou envahissantes jusquiames.



Des combinaisons et changements d'ordre

Problème 4

Sept personnes devant dîner ensemble, il s'élève entre elles un combat de politesse sur les places ; enfin, quelqu'un voulant terminer la contestation, propose de se mettre à table comme l'on se trouve, sauf à dîner ensemble le lendemain et les jours suivants, jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les arrangements possibles.

On demande combien de dîners devront être donnés pour cet effet ?

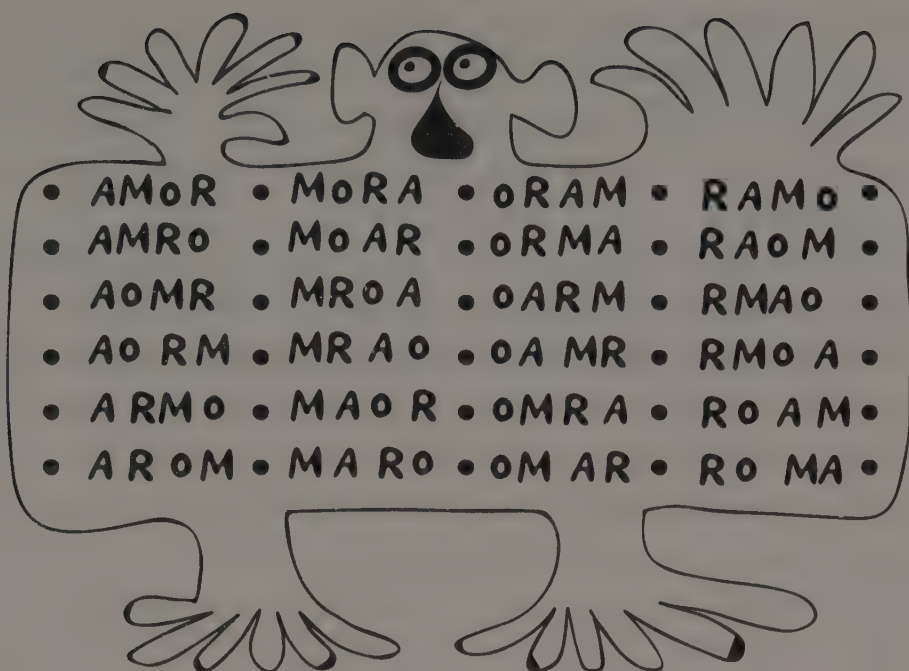


(Notes et commentaires, page 24)

Il est aisé de répondre qu'il en faudrait 5040, ce qui exigerait 13 ans et plus de 9 mois.

Si l'on a un mot quelconque, par exemple AMOR, et qu'on veuille savoir combien de mots différents on peut former de ses quatre lettres, ce qui donne tous les anagrammes possibles du mot AMOR, on trouve qu'ils sont au nombre de 24, à savoir, le produit successif de 1, 2, 3 et 4. Les voici toutes :





Parmi elles, les anagrammes latines du mot amor sont au nombre de sept, à savoir, Roma, mora, maro, oram, ramo, armo, orma.

Mais si, dans le mot proposé, il y avait une ou plusieurs lettres répétées, il faudrait raisonner comme suit.

Ainsi le mot *Leopoldus*, où la lettre « l » est deux fois et la lettre « o » pareillement deux fois, n'est susceptible que de 90 720 arrangements ou anagrammes différents, au lieu de 362 880 qui s'y trouveraient si aucune lettre n'était répétée ; car il faut diviser ce nombre par le produit de 2 par 2, ou par 4, ce qui donne 90 720.

Le mot *studiosus*, où le « u » est répété deux fois, et le « s » trois, n'est susceptible que de 30 240 arrangements ; car il faut diviser le nombre d'arrangements de 9 lettres, qui est 362 880 par le produit de 2 et 6, soit 12, et le quotient est 30 240.

On trouverait ainsi le nombre de tous les anagrammes possibles d'un mot quelconque ; mais il faut convenir que, pour peu nombreuses que soient les lettres d'un mot, le nombre d'arrangements qui en résulte est si considérable, que le travail de les parcourir tous absorberait la vie d'un homme.



NOTES ET COMMENTAIRES – problème 4

• Le nombre de permutations que l'on peut réaliser avec peu d'objets (ou de personnes) étonne toujours ceux qui font le calcul pour la première fois. C'est que les résultats obtenus par des multiplications successives deviennent, très vite, très grands.

Ainsi, lorsqu'il y a deux personnes, A et B, il n'y a que 2 façons de les placer l'une à côté de l'autre : AB ou BA.

Une troisième personne pouvant se mettre à 3 places possibles (à gauche, entre les deux ou à droite), il y a déjà 6 façons de placer 3 personnes : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

La quatrième personne pouvant alors se mettre à 4 places possibles, il y a 6×4 , soit 24 façons de placer 4 personnes.

Plus généralement, il y a $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (n-1) \times n$ façons de placer n personnes.

Ce nombre, égal au produit des n premiers nombres entiers (de 1 à n), est appelé « factorielle n » et il est *postnoté*, comme pour marquer notre étonnement devant sa grandeur, avec un point d'exclamation : $n!$

On a bien $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$.

• Cependant, il faut faire attention à la forme de la table autour de laquelle on voudrait faire asseoir 7 personnes :

Si cette table est ronde, sans place particulièrement remarquable, le nombre de façons d'y installer n personnes n'est que $(n-1)!$.

En effet, la disposition des personnes est la même, à une rotation de tous près, ce qui divise par n le nombre de possibilités.

Par contre, si l'une des places peut être considérée comme « la première », le nombre de façons d'y installer n personnes est bien $n!$ (comme si elles étaient alignées l'une à côté de l'autre).

• Le dernier paragraphe du texte traite d'une intéressante circonstance : si une lettre se répète dans un mot, alors le nombre de permutations des lettres de ce mot diminue ; en effet, par exemple, il n'y a qu'une manière d'écrire le mot de trois lettres « EEE », et non six.

Ainsi dans le mot STUDIOSUS, si les deux lettres U étaient différentes (U_1 et U_2) et les trois lettres S aussi (S_1 , S_2 et S_3), alors, il y aurait $9!$ mots différents avec ces 9 lettres. Mais, comme la permutation des deux lettres U_1 et U_2 donne deux mots identiques, il faut diviser par 2 le nombre de mots possibles ; et comme la permutation des trois lettres S_1 , S_2 et S_3 donne 3! mots identiques, il faut aussi diviser par 3! ce nombre de mots ; ce qui donne une division par 2 et par 6, soit par 12.



Quelques jeux arithmétiques de divination et de combinaisons

Problème 5

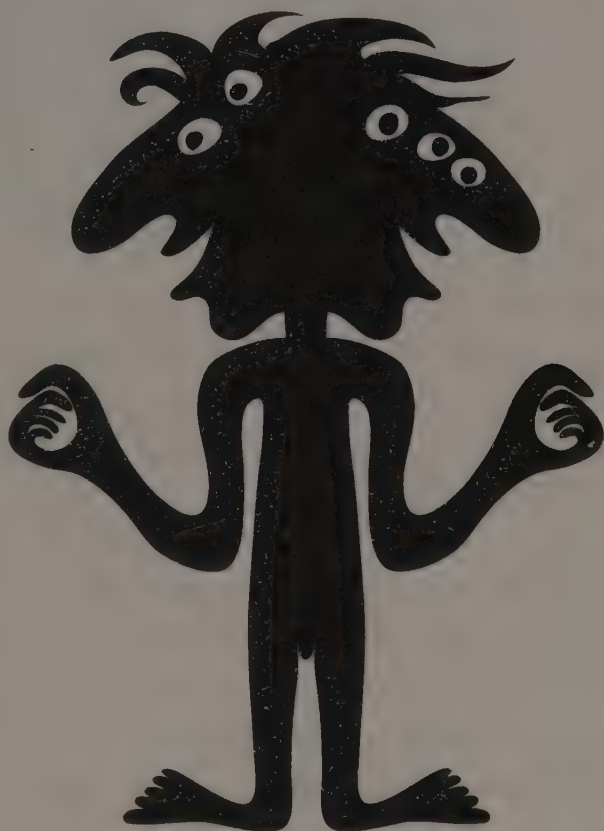
Une personne ayant dans une main un nombre pair d'écus ou de jetons, et dans l'autre un nombre impair, deviner en quelle main est le nombre pair ?

(Notes et commentaires, page 40)

Faites multiplier le nombre de la main droite par un nombre pair tel qu'il vous plaira, comme par 2, et le nombre de la main gauche par un nombre impair, 3 par exemple ; faites ajouter les deux sommes : si le total est impair, le nombre pair de pièces est dans la main droite, et l'impair dans la main gauche ; si ce total est pair, ce sera le contraire.

Qu'il y ait, par exemple, dans la main droite 8 pièces, et dans la gauche 7 : en multipliant 8, par 2 on aura 16, et le produit de 7 par 3 fera 21. La somme est 37, nombre impair.

Si au contraire il y eut 7 dans la main droite, et 8 dans la gauche ; en multipliant 7 par 2 on aurait eu 14, et multipliant 8 par 3 on aurait eu 24, qui ajouté à 14, donne 38, nombre pair.



Problème 6

Trois dessins ayant été secrètement distribués entre trois personnes, deviner celui que chacun aura pris.

(Notes et commentaires, page 40)

Que ces trois dessins soient ceux d'un Angle droit (A), d'un triangle Equilatéral (E) et d'un triangle Isocèle (I).



Que les trois personnes soient Pierre, Simon et Thomas ; vous les regarderez dans leur place tellement rangés, que l'un, comme Pierre, sera le premier, Simon le second, et Thomas le troisième. Ayant fait ces dispositions en vous-mêmes, vous prendrez vingt-quatre jetons, dont vous donnerez à un à Pierre, deux à Simon, et trois à Thomas ; vous laisserez les dix-huit autres sur la table : ensuite vous vous retirerez de la compagnie, afin que les trois personnes se distribuent les trois dessins proposés sans que vous le voyiez. Cette distribution étant faite, vous direz que celui qui a pris l'Angle droit prenne, des dix-huit jetons qui sont restés, autant de jetons que vous lui en avez donné ; que celui qui a pris le triangle Équilatéral prenne, des jetons restés, deux fois autant de jetons que vous lui en avez donné ; enfin, que celui qui a pris le triangle Isocèle prenne, sur le reste de jetons, quatre fois autant de jetons que vous lui en avez donné.



(Dans notre supposition Pierre en aura pris un, Simon quatre, et Thomas douze ; par conséquent il ne reste qu'un jeton sur la table). Cela étant fait, vous reviendrez, et vous connaîtrez par ce qui sera resté de jetons le dessin que chacun aura pris, en faisant usage de cette phrase :

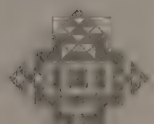
1	2	3	5	6	7
Par	fer	César	jadis	devint	si grand prince.
pAr	fEr	cEsAr	jAdIs	dEvInt	sI grAnd prIncE.

Pour pouvoir se servir de cette phrase, il faut savoir qu'il ne peut rester que 1 jeton, ou 2, ou 3, ou 5, ou 6, ou 7, et jamais 4 : il faut de plus faire attention que chaque syllabe contient une des voyelles représentant chacun des trois dessins proposés : enfin il faut considérer cette phrase comme n'étant composée que de six mots, et que la première syllabe de chaque mot représente la première personne qui est Pierre, et la seconde syllabe représente la seconde personne qui est Simon. Cela bien conçu, s'il ne reste qu'un seul jeton, comme dans notre supposition, vous vous servirez du premier mot, ou plutôt des deux premières syllabes, *Par fer*, dont la première, qui contient A, fait voir que la première personne (Pierre) a l'Angle droit représenté par A ; et la seconde syllabe, qui contient E, montre que la seconde personne (Simon) a l'Équilatéral représenté par E : d'où vous conclurez facilement que la troisième personne (Thomas) a l'Isocèle.

S'il restait deux jetons, vous consulteriez le second mot *César*, dont la première syllabe qui contient E, ferait connaître que la première personne aurait l'Équilatéral représenté par E ; et la seconde syllabe, qui contient A, montrerait que la seconde personne aurait l'Angle droit représenté par A : d'où il serait aisé de conclure que la troisième personne aurait l'Isocèle.

En un mot, selon le nombre de jetons qui resteront, vous emploierez le mot du vers qui sera marqué du même nombre.

Note de l'éditeur : nous avons remplacé les « choses » distribuées dans le texte d'Ozanam (une bague désignée par A, un écu par E et un gant par I) par un Angle droit, un triangle Equilatéral et un triangle Isocèle.



Problème 7

Quinze Chrétiens et quinze Turcs se trouvent sur mer dans un même vaisseau. Il survient une furieuse tempête. Après avoir jeté dans l'eau toutes les marchandises, le pilote annonce qu'il n'y a de moyen de se sauver, que de jeter encore à la mer la moitié des personnes. Il les fait ranger de suite ; et en comptant de 9 en 9, on jette le neuvième à la mer, en recommençant à compter le premier du rang quand il est fini : il se trouve qu'après avoir jeté quinze personnes, les quinze Chrétiens sont restés. Comment a-t-il disposé les trente personnes pour sauver les Chrétiens ?

(Notes et commentaires, page 41)



La disposition de ces trente personnes se déduira de ces deux vers français :

MOrt, tU nE fAillIrAs pAs
En mE livrAnt lE trEpAs !



Pour s'en servir, il faut faire attention aux voyelles A, E, I, O, U, qui se trouvent dans les syllabes de ces vers, en observant que A vaut 1, E vaut 2, I vaut 3, O vaut 4, et U vaut 5.



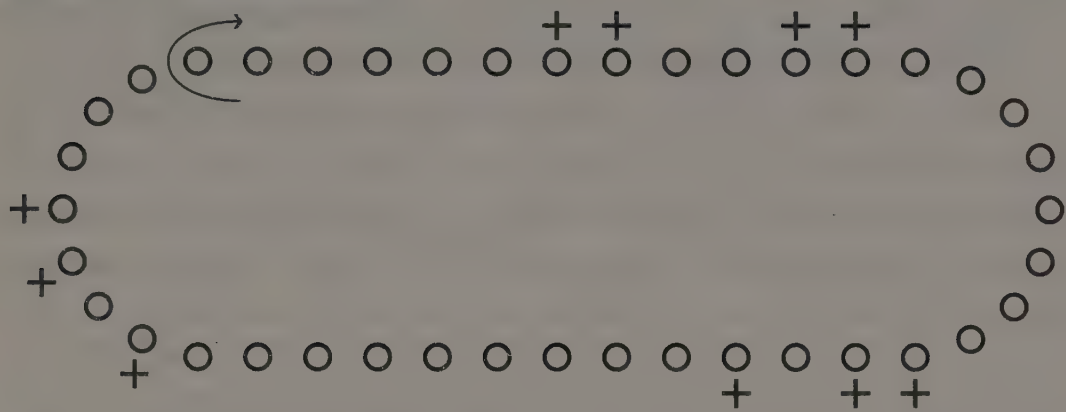
On commencera donc par mettre 4 Chrétiens, à cause la voyelle O de la première syllabe ; puis 5 Turcs, à cause de l'U de la seconde ; et ainsi de suite jusqu'à la fin :



on trouvera que, prenant toujours le neuvième circulairement, c'est-à-dire en recommençant par le premier après avoir achevé le rang, le sort ne tombera absolument que sur les Turcs.



On peut aisément étendre davantage la solution de ce problème. Qu'il faille, par exemple, faire tomber le sort sur 10 personnes de 40, en comptant de 12 en 12 : on rangera à part circulairement 40 zéros, comme on voit ci-dessous :



Et, en commençant par le premier, on marquera le douzième d'une croix ; l'on continuera en comptant jusqu'à 12, et l'on marquera pareillement d'une croix le zéro sur lequel on tombera en comptant 12 ; et ainsi de suite en tournant, et en faisant attention de passer les places déjà croisées, attendu que ceux qui les occupaient sont censés déjà retranchés du nombre. On continuera ainsi, jusqu'à ce qu'on ait le nombre requis de places marquées ; et alors, en comptant le rang qu'elles occupent, en commençant par la première, on connaîtra facilement celle sur lesquelles doit nécessairement tomber le sort de 12 en 12.

On trouve, dans l'exemple proposé, que ce sont la septième, la huitième, la onzième, la douzième, la vingt et unième, la vingt-deuxième, la vingt-quatrième, la trente-quatrième, la trente-sixième, et la trente-septième. (...)

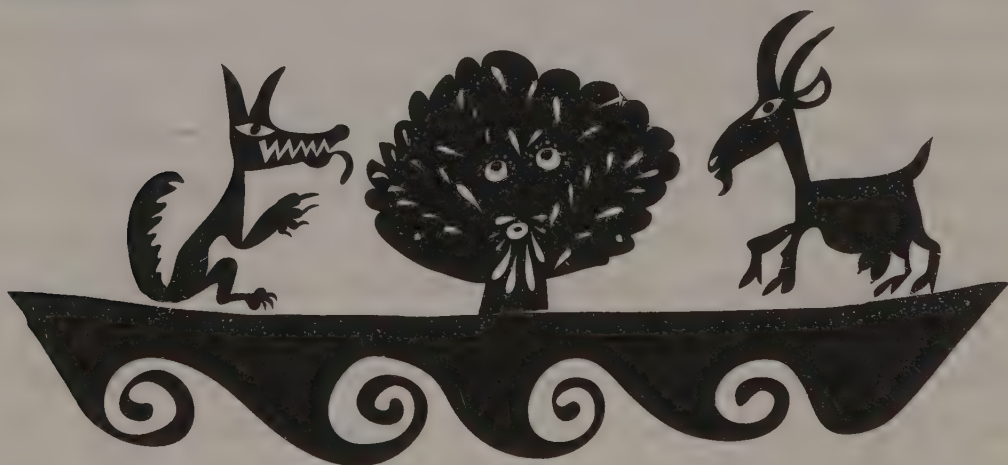
On raconte que ce fut par ce moyen que l'historien Flavius Josèphe sauva sa vie. Il s'était réfugié avec quarante autres Juifs dans une caverne, après la prise de Jotapata par les Romains. Ses compagnons résolurent de s'entre-tuer plutôt que de se rendre. Josèphe essaya en vain de les dissuader de cette horrible résolution : enfin, n'en pouvant venir à bout, il feignit d'adhérer à leur volonté ; et se conservant l'autorité qu'il avait sur eux comme leur chef, il leur persuada, pour éviter le désordre qui suivrait de cette cruelle exécution s'ils s'entre-tuaient à la foule, de se ranger par ordre, et, en commençant de compter par un bout jusqu'à un certain nombre, de massacrer celui sur qui tomberait ce nombre, jusqu'à ce qu'il n'en demeurât qu'un seul

qui se tuerait lui-même. Tous en étant demeurés d'accord, Josèphe les disposa de telle sorte, et choisit pour lui-même une telle place, que, la tuerie étant continuée jusqu'à la fin, il demeura seul avec un autre auquel il persuada de vivre, ou qu'il tua s'il ne voulut pas y consentir.

Telle est l'histoire qu'Hégésippe raconte de Josèphe, et que nous sommes bien éloignés de garantir. Quoi qu'il en soit, en appliquant à ce cas le moyen enseigné ci-dessus, et en supposant que chaque troisième dût être tué, on trouve que les deux dernières places sur lesquelles le sort devait tomber étaient la seizième et la trente et unième ; en sorte que Josèphe dut se mettre à l'une des deux, et placer à l'autre celui qu'il voulait sauver, s'il eût un complice de son artifice.

Note de l'éditeur : remarquez bien que l'effectif initial est, ici, de 41 ; par ailleurs , nous avons corrigé quelques erreurs de la solution donnée dans l'édition originale.

Problème 8



Sur le bord d'une rivière se trouve un loup, une chèvre et un chou : il n'y a qu'un bateau si petit, que le batelier seul et l'un d'eux peuvent y tenir.

Il est question ici de les passer de telle sorte que le loup ne fasse aucun mal à la chèvre, ni la chèvre au chou.

(Notes et commentaires, page 41)

Le batelier commencera par passer la chèvre, puis il retournera prendre le loup. Après avoir passé le loup il ramènera la chèvre, qu'il laissera au bord pour passer le chou. Enfin il retournera à vide chercher la chèvre, qu'il passera. Ainsi le loup ne se trouvera jamais avec la chèvre, ni la chèvre avec le chou, qu'en présence du batelier.



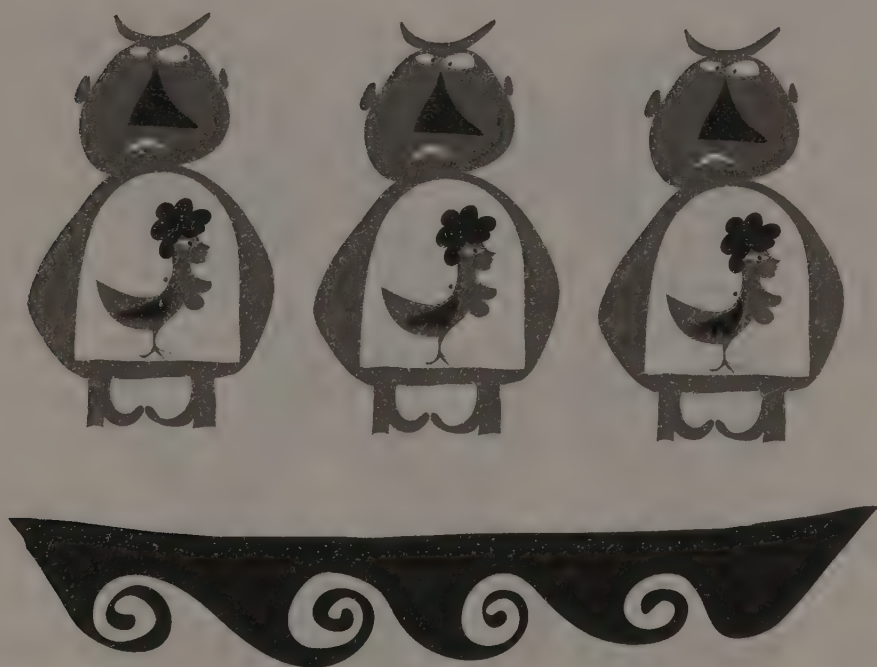
Problème 9

Trois maris jaloux se trouvent avec leurs femmes au passage d'une rivière : ils trouvent un bateau sans batelier : ce bateau est si petit, qu'il ne peut porter que deux personnes à la fois. On demande comment ces six personnes passeront deux par deux, de sorte qu'aucune femme ne demeure en la compagnie d'un ou de deux hommes, si son mari n'est présent.

(Notes et commentaires, page 42)

Deux femmes passeront d'abord ; puis l'une ayant ramené le bateau, repassera avec la troisième femme. Ensuite l'une des trois femmes ramènera le bateau, et se mettant à terre, laissera passer les deux hommes dont les deux femmes sont de l'autre côté. Alors un des hommes ramènera sa femme ; et, la mettant à terre il prendra le troisième homme, et repassera avec lui. Enfin la femme qui se trouve passée entrera dans le bateau, et ira en deux fois chercher les deux autres femmes.

On propose encore ce problème sous le titre des *trois maîtres et trois valets*. Les maîtres s'accordent bien ensemble et les valets aussi ; mais chaque maître ne peut souffrir les deux valets des deux autres, de sorte qu'il ne peut se trouver avec un des deux autres valets en l'absence de son maître.



Problème 10

Un couvent est composé de neuf cellules, dont celle du milieu est occupée par une abbesse aveugle, et les autres par ses religieuses. La bonne abbesse pour s'assurer que ses nonnes ne violent point leur clôture, fait une première fois sa visite ; et , trouvant 3 religieuses dans chaque cellule, ce qui fait 9 par bande, elle va se coucher. Quatre religieuses sortent néanmoins : l'abbesse revient au milieu de la nuit compter ses religieuses ; elle les trouve encore neuf par bande, et elle retourne se reposer tranquille sur leur conduite. Ces quatre religieuses rentrent chacune avec un homme : l'abbesse fait une nouvelle visite ; et, comptant 9 personnes par bande, elle est encore dans la sécurité. Il s'introduit encore quatre hommes ; et l'abbesse, comptant toujours 9 dans chaque bande, est dans la persuasion que personne n'est entré ni sorti. On demande comment cela se peut faire ?

Note de l'éditeur : Montucla trouvait ce problème "assez indécent" et l'a remplacé par le suivant, plus politiquement correct, mais susceptible de "moins piquer la curiosité des lecteurs".

Comment peut-on disposer dans les huit cases extérieures d'un carré divisé en neuf, des jetons, de sorte qu'il y en ait toujours 9 dans chaque bande de l'enceinte, et que cependant ce nombre puisse varier depuis 20 jusqu'à 32 ?

(Notes et commentaires, page 42)



La solution de ce problème se trouvera facilement par l'inspection des quatre tableaux qui suivent, dont le premier représente la disposition primitive des jetons dans les cellules du carré ; le second, celle des mêmes jetons lorsqu'on a ôté 4 ; le troisième, comment ils doivent être disposés lorsqu'on en a fait rentrer 4 avec 4 autres ; le quatrième enfin, celle des mêmes jetons lorsqu'on y ajoute encore 4. Il est clair qu'il y en a toujours 9 dans chaque bande d'enceinte ; et cependant, dans le premier cas, il y en a en tout 24, dans le second, 20, dans le troisième 28, et le quatrième 32.

I

3	3	3
3		3
3	3	3

II

4	1	4
1		1
4	1	4

III

2	5	2
5		5
2	5	2

IV

1	7	1
7		7
1	7	1

On peut pousser la chose plus loin et faire entrer encore 4 hommes au couvent, sans que son abbesse s'en aperçoive ; et puis faire sortir tous les hommes avec six religieuses, de sorte qu'il n'en reste plus que 18, au lieu de 24 qu'elles étaient primitivement.

Les deux tableaux suivants en montrent la possibilité.

V

0	9	0
9		9
0	9	0

VI

5	0	4
0		0
4	0	5

Il est sans doute assez superflu de montrer d'où provient l'illusion de la bonne abbesse. C'est que les nombres qui sont dans les cases angulaires du carré sont comptés deux fois, ces cases étant communes à deux bandes. Ainsi, plus on charge les cases angulaires, en vidant celles du milieu de chaque bande, plus on fait de ces doubles emplois ; ce qui fait qu'il paraît y avoir toujours le même nombre, tandis qu'il est diminué. Le contraire arrive à mesure qu'on charge les cases du milieu, en vidant les cases angulaires ; ce qui fait qu'on est obligé d'y ajouter quelques unités pour avoir 9 dans chaque bande.

Problème 11

Quelqu'un ayant une bouteille de huit pintes pleine d'un vin excellent, en veut faire présent de la moitié ou de quatre pintes à un ami ; mais il n'a pour le mesurer que deux autres vases, l'un de cinq, l'autre de trois pintes. Comment doit-il faire pour mettre quatre pintes dans le vase de cinq ?

(Notes et commentaires, page 43)

Pour cet effet appelons A la bouteille de 8 pintes, B celle de 5, et C celle de 3 ; en supposant qu'il y a 8 pintes de vin dans la bouteille A, et que les deux autres B et C, soient vides, comme vous le voyez en D. Ayant rempli la bouteille B du vin de la bouteille A, où il ne restera plus que 3 pintes, comme vous le voyez en E, remplissez la bouteille C du vin de la bouteille B, où par conséquent il ne restera plus que deux pintes, comme vous le voyez en F. Après cela versez le vin de la bouteille C dans la bouteille A, où par conséquent il y aura 6 pintes, comme vous le voyez en G ; et versez les deux pintes de la bouteille B dans la bouteille C, où il y aura deux pintes, comme vous le voyez en H. Enfin, ayant rempli la bouteille B du vin de la bouteille A, où il restera seulement une pinte, comme vous le voyez en I, achevez de remplir la bouteille C du vin de la bouteille B, où il restera 4 pintes, comme vous voyez en K ; ainsi la question se trouvera résolue.



	8	5	3
	A	B	C
D	8	0	0
E	3	5	0
F	3	2	3
G	6	2	0
H	6	0	2
I	1	5	2
K	1	4	3

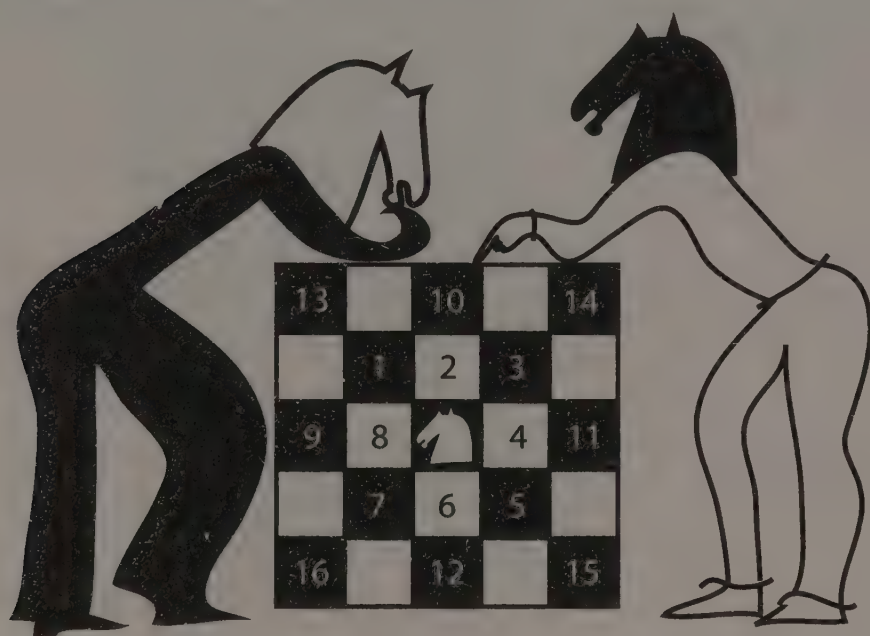


Problème 12

Faire parcourir au cavalier du jeu des Échecs toutes les cases du damier l'une après l'autre, sans passer deux fois sur la même.

(Notes et commentaires, page 44)

Notre lecteur connaît probablement la marche du cavalier dans le jeu des Échecs : dans le cas contraire, la voici. Le cavalier étant placé sur la case centrale, il ne peut aller à aucune de celles qui l'environnent immédiatement, comme 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, ni aux cases 9, 10, 11, 12, qui sont directement au-dessus, ou au-dessous, ou à côté, ni aux cases 13, 14, 15, 16, qui sont dans les diagonales, mais seulement à une des huit cases qui, dans la figure, sont vides.



Quelques hommes célèbres ce sont amusés de ce problème de combinaisons ; à savoir, M. de Montmort, M. de Moivre et M. de Mairan, et ils en ont donné chacun une solution. Dans les deux premières, on suppose le cavalier placé d'abord sur une des cases angulaires de l'échiquier ; dans la troisième, on le suppose partant de l'une des quatre du centre : mais je crois que, jusqu'à ces dernières années, on n'en connaissait aucune qui fût telle que, plaçant le cavalier sur une case quelconque, on pût lui faire parcourir tout le damier ; et même en sorte que, sans revenir sur ses pas, il pût continuer sa route, et parcourir encore une seconde fois le damier sous la même condition. Cette dernière solution est due à M. de W***, capitaine au régiment de Kinski, dragons, au service de l'Impératrice-Reine.



Nous allons donner les quatre tableaux de ces quatre solutions, avec une explication et quelques remarques.

I. De M. de Montmort

1	38	31	44	3	46	29	42
32	35	2	39	30	43	4	47
37	8	33	26	45	6	41	28
34	25	36	7	40	27	48	5
9	60	17	56	11	52	19	50
24	57	10	63	18	49	12	53
61	16	59	22	55	14	51	20
58	23	62	15	64	21	54	13

II. De M. Moivre

34	49	22	11	36	39	24	1
21	10	35	50	23	12	37	40
48	33	62	57	38	25	2	13
9	20	51	54	63	60	41	26
32	47	58	61	56	53	14	3
19	8	55	52	59	64	27	42
46	31	6	17	44	29	4	15
7	18	45	30	5	16	43	28

III. De M. de Mairan

40	9	26	53	42	7	64	29
25	52	41	8	27	30	43	6
10	39	24	57	54	63	28	31
23	56	51	60	1	44	5	62
50	11	38	55	58	61	32	45
37	22	59	48	19	2	15	4
12	49	20	35	14	17	46	33
21	36	13	18	47	34	3	16

IV. De M. de W***

25	22	37	8	35	20	47	6
38	9	24	21	52	7	34	19
23	26	11	36	59	48	5	46
10	39	62	51	56	53	18	33
27	12	55	58	49	60	45	4
40	63	50	61	54	57	32	17
13	28	1	42	15	30	3	44
64	41	14	29	2	43	16	31



De ces quatre manières de résoudre le problème, celle de M. de Moivre est sans contredit la plus facile à s'imprimer dans la mémoire ; car le principe de sa méthode consiste à remplir autant qu'il est possible les deux bandes d'enceinte et de ne se jeter sur la troisième que lorsqu'il n'y a nul autre moyen de passer, de la place où l'on est, sur l'une des deux premières ; règle qui nécessite la marche du cavalier, depuis son premier pas jusqu'au cinquantième, de la manière la plus claire, et même par-delà ; car, de la case marquée 50, il n'y a de choix pour se placer, que sur celles qui sont marquées 51 et 63 : mais la case 51, étant plus proche de la bande, doit être préférée, et alors la marche est nécessitée par 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61. Arrivé là, il est indifférent qu'on se pose sur celle marquée 64 ; car de là on ira sur la pénultième 63, et on finira sur 62 ; ou bien d'aller à 62 pour passer à 63, et finir à 64. Ainsi l'on peut dire que la marche du cavalier, dans cette solution, est presque contrainte.

Il n'en est pas ainsi de la quatrième : il est difficile de la pratiquer autrement que de mémoire ; mais elle a un avantage très grand ; c'est qu'on peut commencer par la case que l'on voudra, ainsi que nous l'avons dit, parce que son auteur a eu l'industrie de ramener le cavalier, en finissant, dans une place d'où il peut repasser dans la première. Ainsi sa marche est en quelque sorte circulaire et interminable, en remplissant la condition de ne repasser sur la même case qu'après soixante-quatre coups.

Il est facile de voir que, pour exécuter cette marche sans confusion, il faut à chaque pas marquer la case que quitte le cavalier. On couvrira donc toutes les cases chacune d'un jeton, et on en ôtera le jeton à mesure que le cavalier aura passé sur la case : ou bien, au contraire, on mettra un jeton sur chaque case à mesure que le cavalier aura passé dessus.



Problème 13

Distribuer entre trois personnes vingt et un tonneaux, dont sept pleins, sept vides et sept demi-pleins en sorte que chacune ait la même quantité de vin et de tonneaux.

(Notes et commentaires, page 45)



Ce problème admet deux solutions, qui ne sauraient être rendues plus clairement que par les deux tableaux qui suivent.

I	Tonneaux pleins	Tonneaux vides	Tonneaux demi-pleins
1 ^{ère} personne	2	2	3
2 ^e personne	2	2	3
3 ^e personne	3	3	1

II	Tonneaux pleins	Tonneaux vides	Tonneaux demi-pleins
1 ^{ère} personne	3	3	1
2 ^e personne	3	3	1
3 ^e personne	1	1	5



Il est évident que, dans ces deux combinaisons, chaque personne aura 7 tonneaux, et 3 tonneaux et demi de vin.

Il est, du reste, facile de voir qu'il est nécessaire que le nombre total de tonneaux soit divisible par le nombre de personnes ; car autrement la chose demandée serait impossible.

On trouvera de la même manière que, si l'on avait 24 tonneaux à partager à trois personnes sous les conditions ci-dessus, on aurait trois solutions différentes ; à savoir :

I	Tonneaux pleins	Tonneaux vides	Tonneaux demi-pleins
1 ^{ère} personne	3	3	2
2 ^e personne	3	3	2
3 ^e personne	2	2	4

II	Tonneaux pleins	Tonneaux vides	Tonneaux demi-pleins
1 ^{ère} personne	2	2	4
2 ^e personne	2	2	4
3 ^e personne	4	4	0

III	Tonneaux pleins	Tonneaux vides	Tonneaux demi-pleins
1 ^{ère} personne	1	1	6
2 ^e personne	3	3	2
3 ^e personne	4	4	0



NOTES ET COMMENTAIRES – problèmes 5 à 13

Les jeux de « divination » semblaient très prisés de nos anciens ; il s'agissait de DEVINER un nombre, un objet ou sa position en posant une question, indirecte, dont la réponse n'avait pas l'air de donner d'information utile. On espérait ainsi étonner le spectateur en prétendant deviner ce que l'on ne faisait, en fait, que calculer. Nous avons choisi deux exemples de ces divinations ; la première en montre le principe (naïf mais astucieusement caché) ; la deuxième est beaucoup plus intéressante (et doit donc être bien étudiée avant d'être expérimentée).

problème 5

• Appelons D et G les nombres de jetons dans les mains droite et gauche de la personne. On calcule $2D + 3G$. Il suffit alors de savoir ceci :

... d'une part, le produit d'un nombre pair (deux par exemple) par un nombre quelconque est pair et le produit d'un nombre impair par un nombre impair est impair.

... d'autre part, la somme de deux pairs (ou de deux impairs) est paire, et la somme d'un pair et d'un impair est impaire.

Si D est pair et G impair, alors le nombre $2D + 3G$ est un nombre impair.

Inversement, si D est impair et G pair, alors le nombre $2D + 3G$ est un nombre pair.

La parité de $2D + 3G$ est celle du nombre de jetons dans la main gauche.

problème 6

• Trois personnes, repérées par les nombres 1, 2 et 3, ont reçu chacune l'un des trois objets A, E ou I.

On a demandé de multiplier par 1 le nombre de celui qui a l'objet A, de multiplier par 2 le nombre de celui qui a l'objet E, et de multiplier par 4 le nombre de celui qui a l'objet I.

L'astuce consiste en ce que la somme des nombres obtenus est différente selon chaque distribution possible des objets. Si cette distribution est, dans l'ordre 1, 2, 3, des personnes...

... AEI, la somme vaut $1 + 4 + 12$, soit 17 (dont le complément à 18 vaut 1)

... AIE, la somme vaut $1 + 8 + 6$, soit 15 (dont le complément à 18 vaut 3)

... EAI, la somme vaut $2 + 2 + 12$, soit 16 (dont le complément à 18 vaut 2)

... EIA, la somme vaut $2 + 8 + 3$, soit 13 (dont le complément à 18 vaut 5)

... IAE, la somme vaut $4 + 2 + 6$, soit 12 (dont le complément à 18 vaut 6)

... IEA, la somme vaut $4 + 4 + 3$, soit 11 (dont le complément à 18 vaut 7).



Les nombres de jetons restant sur la table permettent donc de retrouver la distribution des objets :

- 1 donne AEI (pAr fEr),
- 2 donne EAI (cEsAr),
- 3 donne AIE (jAdIs),
- 4 n'est jamais obtenu,
- 5 donne EIA (dEvInt),
- 6 donne IAE (sI grAnd),
- 7 donne IEA (prIncE).

Heureusement, comme dans tous les cas un peu spectaculaire de ce genre de tour, une phrase mnémotechnique permet de se souvenir de ce qu'il faut pour le réussir.

problème 7

- L'histoire racontée par Ozanam n'est pas vraiment politiquement correcte... Cependant, aujourd'hui encore les comptines rythment les jeux des jeunes enfants dans les cours de récréation, pour choisir ou éliminer un ou plusieurs élèves d'un groupe : « Un, deux, trois, c'est toi ! » ou bien « Am ! Stram ! Gram ! Pic et Pic et Colegram ! ».

Lorsque les circonstances deviennent délicates, le secours d'un peu de logique, ou de quelques calculs, ou encore de vraies mathématiques, est bien utile pour se sortir au mieux de l'algorithme de choix ou d'élimination !

- Le texte de Jacques Ozanam est suffisamment détaillé pour pouvoir être lu sans grand problème, à condition d'y accorder l'attention nécessaire en vérifiant soi-même le processus d'élimination.

problème 8

- L'histoire se déroule avec quatre personnages : le loup, la chèvre, le chou et le batelier passeur. Lorsque le passeur est dans le bateau, la chèvre ne peut être que toute seule sur une rive, ou bien avec lui (sinon, soit le loup s'en occupe, soit c'est elle qui s'occupe du chou).

Le passeur ne pouvant prendre qu'un personnage à la fois, il est donc obligé de passer d'abord la chèvre sur l'autre rive.

Il a alors deux solutions :

... soit revenir chercher le loup et le faire traverser sur la rive de la chèvre ; il doit alors reprendre la chèvre avec lui pour aller chercher le chou (en laissant la chèvre sur la première rive) ; ayant déposé le chou avec le loup,



il peut alors aller rechercher la chèvre et revenir avec elle ; mission accomplie pour le passeur.

... soit revenir chercher le chou et le faire traverser sur la rive de la chèvre ; il doit alors reprendre la chèvre avec lui pour aller chercher le loup (en laissant la chèvre sur la première rive) ; ayant déposé le loup avec le chou, il peut alors aller rechercher la chèvre et revenir avec elle ; mission accomplie pour le passeur.

Il y a donc deux solutions, car le loup et le chou ont des rôles symétriques (leur présence avec la chèvre étant également interdite, bien qu'ayant des conséquences plutôt différentes pour elle).

problème 9

- Le problème des maris jaloux ne présente pas plus de difficultés que celui du loup, de la chèvre et du chou, et sa solution se trouve simplement en tenant compte des contraintes au fur et à mesure des passages. On peut remarquer qu'un homme ne reste jamais seul, ni à terre, ni en bateau. Ce problème est l'un des plus répétés de l'histoire des récréations logiques, et on le trouve encore régulièrement dans les journaux et périodiques de notre XXI^e siècle, malgré son sexisme suranné qui devrait le faire bannir de toute publication non historique.

problème 10

- Dans l'édition de 1778, Montucla, très sérieux académicien n'avait pas voulu garder le texte initial, pourtant savoureux, de Jacques Ozanam, qui mettait en scène des religieuses accueillant des hommes dans leurs chambres. Montucla, qui n'avait donc pas peur du ridicule, remplaçait les religieuses par des jetons ; assurément, il n'était pas du côté de Voltaire et de Diderot, en cette période pourtant éclairée par les *Lumières*.

- Toute cette histoire n'est possible que grâce à la négligence de l'abbesse. Elle doit vérifier la valeur de 8 nombres (les effectifs dans les 8 cellules formant le carré) ; et elle ne vérifie que la valeur de 4 nombres (les sommes sur les côtés).

c_1	m_1	c_2
m_4		m_2
c_4	m_3	c_3

Cela laisse 4 degrés de liberté dont les religieuses profitent intelligemment... En fait Ozanam aurait pu faire varier très largement tous ces nombres en respectant les égalités

$$c_1 + m_1 + c_2 = c_2 + m_2 + c_3 = c_3 + m_3 + c_4 = c_4 + m_4 + c_1 = 9.$$

Voici, par exemple, deux dispositions respectant les vérifications :



5	2	2
3		3
1	4	4

et

4	3	2
5		6
0	8	1

La première ne correspond qu'à un simple déplacement des religieuses les unes chez les autres ; il y a bien 9 personnes par côté et toujours 24 personnes au total.

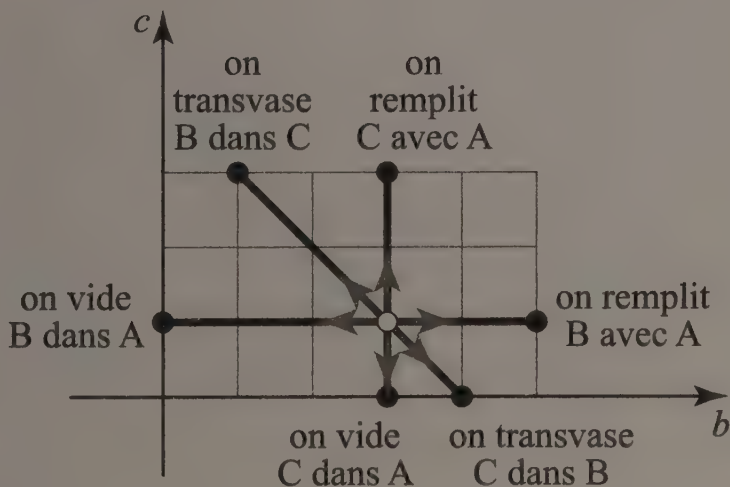
Mais la deuxième aura permis l'intrusion de 5 hommes : il y a bien toujours 9 personnes par côté mais 29 personnes au total.

En fait, pour l'esthétique de l'exercice, Ozanam s'est imposé l'égalité des nombres aux quatre coins, ainsi que l'égalité des nombres dans les cellules des milieux de chaque côté. Cela donne 6 égalités : $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$ et $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$; les égalités des quatre côtés se réduisent alors à une seule : $m + 2c = 9$.

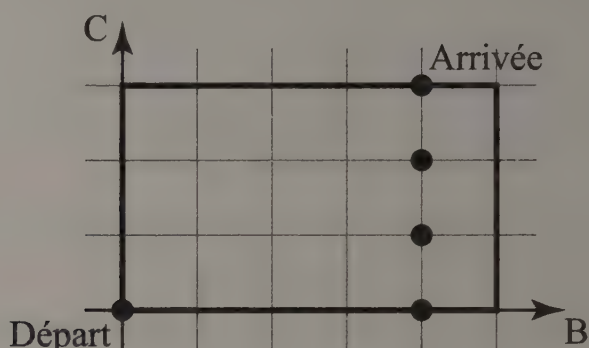
L'exercice d'Ozanam impose donc 7 égalités et il reste donc 1 degré de liberté aux religieuses, celui de choisir m (qui peut valoir 1, 3, 5, 7 ou 9).

problème 11

• Comment réfléchir à ces problèmes de transvasements entre 3 récipients ? Le truc fondamental consiste à caractériser la situation par 2 nombres seulement, mesurant ce qu'il y a dans le récipient moyen (B) et dans le petit récipient (C). En effet, la quantité totale restant constante, on sait alors ce qu'il y a aussi dans le grand récipient (A). Et l'on peut représenter alors la situation par un point de coordonnées (b,c) dans le plan repéré ; un transvasement se représente alors par un segment allant d'un point à un autre ; et, si on veut toujours connaître les contenus exacts de chaque récipient, les seuls transvasements possibles sont ceux qui consistent à remplir ou à vider complètement un récipient, comme sur le schéma suivant :



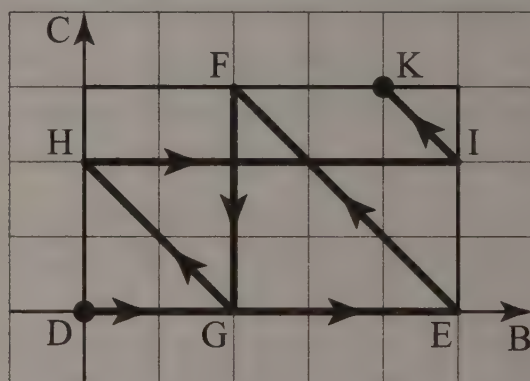
- Le problème posé par Ozanam consiste alors à trouver un chemin qui va de $(0,0)$ à l'un des points $(4,c)$.



Il suffit de quelques tâtonnements pour trouver le bon chemin : D, E, F, G, H, I, K.

(On facilite d'ailleurs cette recherche en partant de K et en cherchant le chemin à l'envers.)

Voici, ici représenté graphiquement, la solution donnée par Ozanam :



problème 12

- Le problème des cavaliers sur l'échiquier est l'un des problèmes de déplacements les plus connus et les plus traités de l'histoire des amusements de l'intelligence. De très grands mathématiciens, comme Euler au XVIII^e siècle, se sont intéressés à ses solutions, à leur nombre et à leurs généralisations sur des « échiquiers » non standard sur lesquels peuvent se déplacer des pièces aux règles de mouvement exotiques...
- Le texte d'Ozanam, sur ce sujet devenu très classique, est intéressant et facile à lire...



problème 13

• Le problème est plus simple à résoudre qu'il en a l'air, même dans le cas général de $3n$ tonneaux (n pleins, n à moitié pleins et n vides).

Chaque personne doit recevoir n tonneaux et une quantité $n/2$ de tonneaux de vin. En fait on peut distribuer les n tonneaux pleins comme l'on veut entre les 3 personnes, à condition évidemment que chacune n'en ait pas plus que $n/2$. Par exemple, si on a distribué a , b et c tonneaux pleins de sorte que

$$a + b + c = n,$$

une solution est :

a pleins, $(n - 2a)$ à moitié pleins et a vides à la première personne,
 b pleins, $(n - 2b)$ à moitié pleins et b vides à la deuxième personne,
 c pleins, $(n - 2c)$ à moitié pleins et c vides à la troisième personne.

Et chaque personne aura bien ainsi n tonneaux et une quantité $n/2$ de tonneaux de vin.

• Dans le cas où $n = 7$, à 21 tonneaux, il y a effectivement deux manières de décomposer 7 en une somme de 3 nombres entiers au plus égaux à 3,5 :

$$7 = 1 + 3 + 3$$

$$7 = 2 + 2 + 3$$

d'où les deux solutions données par Ozanam.

• Et dans le cas où $n = 8$, à 24 tonneaux, il y a effectivement trois manières de décomposer 8 en une somme de 3 nombres entiers, plus grands que 0, au plus égaux à 4 :

$$8 = 2 + 3 + 3$$

$$8 = 2 + 2 + 4$$

$$8 = 1 + 3 + 4$$

d'où les trois solutions données par Ozanam.

Cependant, il y a une solution que n'ont signalée ni Ozanam ni Montucla, c'est la solution $8 = 0 + 4 + 4$, donnant la répartition :

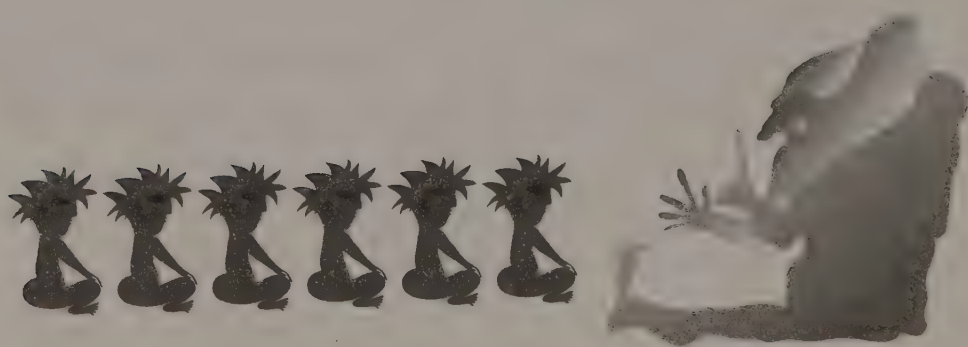
	Tonneaux pleins	Tonneaux vides	Tonneaux demi-pleins
1 ^{ère} personne	4	4	0
2 ^e personne	4	4	0
3 ^e personne	0	0	8



Divers problèmes arithmétiques curieux

Problème 14

Un père de famille ordonne, par son testament, que l'aîné de ses enfants prendra, sur tous ses biens, 10 000 livres et la septième partie de ce qui restera ; le second 20 000 livres et la septième partie de ce qui restera ; le troisième 30 000 livres et la septième partie du surplus ; et ainsi de suite jusqu'au dernier, en augmentant



toujours de 10 000 livres. Ses enfants ayant suivi la disposition du testament, il se trouve qu'ils ont été également partagés.

On demande combien il y avait d'enfants, quel était le bien de ce père, et quelle a été la part de chacun des enfants ?

(Notes et commentaires, page 59)

On trouve, par l'analyse, que le bien du père était de 360 000 livres ; qu'il y avait six enfants, et qu'ils ont eu chacun 60 000 livres.

En effet, le premier prenant 10 000, le restant du bien est de 350 000 livres, dont la septième partie est 50 000, qui, avec 10 000, font 60 000 livres. Le premier enfant ayant pris sa portion, il reste 300 000 livres ; sur laquelle somme le second prenant 20 000 livres, le restant est 280 000, dont la septième partie est 40 000, qui avec les 20 000 ci-dessus, font encore 60 000 livres ; et ainsi de suite.



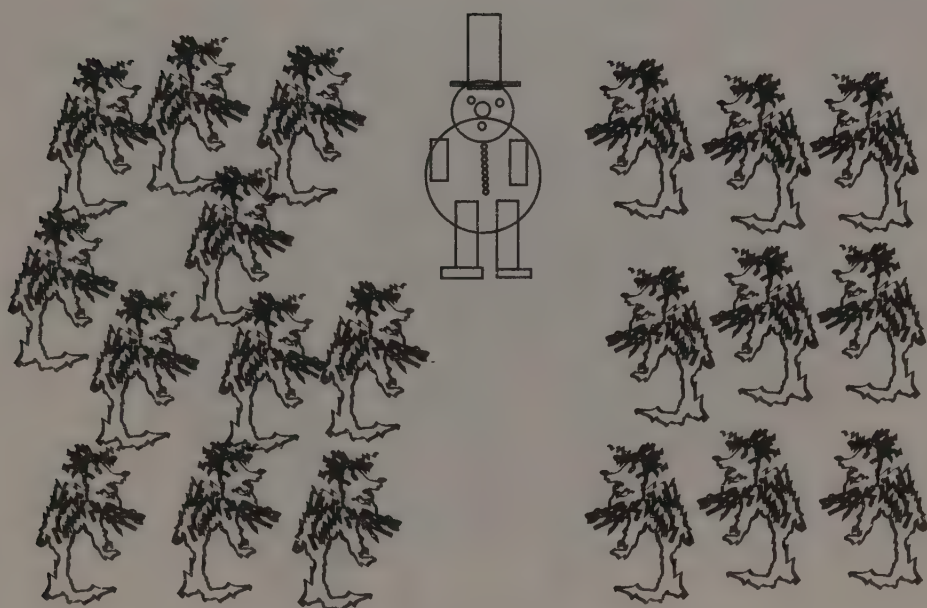
Problème 15

Un homme rencontre, en sortant de sa maison, un certain nombre de pauvres : il veut leur distribuer l'argent qu'il a sur lui. Il trouve qu'en donnant à chacun neuf sous, il en a trente-deux de moins qu'il ne faut ; mais qu'en en donnant à chacun sept, il lui en reste vingt-quatre.

Quel était le nombre des pauvres ?

Et quelle était la somme que cet homme avait dans sa bourse ?

(Notes et commentaires, page 59)



Il y avait 28 pauvres, et cet homme avait dans sa bourse 220 sous ; car en multipliant 28 par 9, on trouve 252, dont on ôte 32, puisqu'il manquait 32 sous, le restant est 220 sous.

Et, en donnant à chacun des pauvres 7 sous, il n'en fallait que 196 ; et par conséquent il restait bien 24 sous.



Problème 16

Un lion de bronze, placé sur le bassin d'une fontaine, peut jeter l'eau par la gueule, par les yeux et par le pied droit. S'il jette l'eau par la gueule, il remplira le bassin en six heures ; s'il jette l'eau par l'œil droit, il le remplira en deux jours ; la jetant par l'œil gauche, il le remplirait en trois ; enfin, en la jetant par le pied, il le remplira en quatre jours. En combien de temps le bassin sera-t-il rempli, lorsque l'eau sortira à la fois par toutes ces ouvertures ?

(Notes et commentaires, page 59)



Pour résoudre ce problème, on observera que, puisque le lion, jetant l'eau par la gueule, remplit le bassin en six heures, il en remplira un sixième en une heure ; et puisque, la jetant par l'œil droit, il le remplit en deux jours, en une heure il en remplira $1/48^e$. On trouvera de même qu'il en remplira $1/72^e$ en une heure en jetant l'eau par l'œil gauche, et $1/96^e$ en la jetant par le pied. Donc, la jetant par les quatre ouvertures à la fois, il en fournira en une heure $1/6 + 1/48 + 1/72 + 1/96$, c'est-à-dire, en ajoutant toutes ces fractions, les $61/288^e$. Qu'on fasse donc cette proportion : si les $61/288^e$ ont été fournies en une heure ou 60 minutes, combien la totalité du bassin ou les $288/288^e$ exigeront-elles de minutes ? Et on trouvera 4 heures, 43 minutes, 16 secondes et $44/61$ ou environ 43 tierces.



Problème 17

Un mulet et un âne faisant voyage ensemble, l'âne se plaignait du fardeau dont il était chargé. Le mulet lui dit : Animal paresseux, de quoi te plains-tu ? Si tu me donnais un des sacs que tu portes, j'en aurais le double des tiens ; mais si je t'en donnais un des miens, nous en aurions seulement autant l'un que l'autre.

On demande quel était le nombre de sacs dont l'un et l'autre étaient chargés ?

(Notes et commentaires, page 60)

Ce problème, un de ceux qu'on propose ordinairement aux commençants en algèbre, est tiré d'un recueil d'épigrammes grecques, connu sous le nom d'*Anthologie*.



Puisque, le mulet donnant un de ses sacs à l'âne, ils se trouvent également chargés, il est évident que la différence des sacs qu'ils portent est égale à deux. Maintenant, si le mulet en reçoit un de ceux de l'âne, la différence sera quatre ; mais alors le mulet aura le double du nombre de sacs de l'âne : conséquemment le mulet en aura huit, et l'âne quatre.



Que le mulet en rende un à l'âne, celui-ci en aura cinq, et le premier en aura sept. Ce sont les nombres de sacs dont ils étaient chargés, et la réponse à la question.

On peut revêtir ce problème de bien de formes différentes : mais il serait puéril et superflu de s'y arrêter.

Ce problème, du reste, n'est pas le seul que nous présente l'*Anthologie* grecque : en voici quelques autres que M. Bachet de Méziriac avait insérés dans une note sur un des problèmes de Diophante.

Problème 18

Les trois Grâces portant des oranges, dont elles ont chacune un égal nombre, sont rencontrées par les neuf Muses qui leur en demandent : chaque Grâce en donne à chaque Muse le même nombre ; après cela chaque Muse et chaque Grâce se trouve également partagée. Combien en avaient les premières ?

(Notes et commentaires, page 60)

Le moindre nombre qui satisfasse à la question est 12 ; car, en supposant que chaque Grâce en eût donné une à chaque Muse, elles se trouveront en avoir chacune 3, et il en restera 3 à chaque Grâce. Les nombres 24, 36, etc. satisferont également à la question ; et, après distribution faite, chacune des Grâces et des Muses en eût eu 6, ou 9, etc.



Problème 19

« Dis-moi illustre Pythagore, combien de disciples fréquentent ton école ? Je vais te le dire, répond le philosophe. Une moitié étudie les mathématiques, un quart la physique, une septième partie garde le silence ; et il y a de plus trois femmes. »

(Notes et commentaires, page 60)

Ainsi, il s'agit de trouver un nombre dont une moitié, un quart et un septième, en y ajoutant 3, fassent ce nombre lui-même. Il est aisé de répondre que ce nombre est 28.

Problème 20

« On demande quelle heure il est ; et l'on répond que ce qui reste du jour est les quatre tiers des heures déjà écoulées. »

(Notes et commentaires, page 61)



En divisant la durée du jour, comme faisaient les anciens, en 12 parties, il est question de partager ce nombre en deux parties, telles que les $\frac{4}{3}$ de la première soient ensemble égaux à la seconde ; ce qui donne, pour le nombre des heures écoulées, 5 et $\frac{1}{7}^e$ et conséquemment, pour le reste du jour, 6 heures et $\frac{6}{7}^e$.



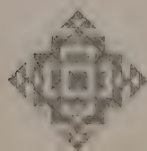
Problème 21

(Notes et commentaires, page 61)



	Passant, sous ce tombeau repose Diophante.	
	Ces quelques vers tracés par une main savante	
	Vont te faire connaître à quel âge il est mort.	
	Des jours assez nombreux que lui compta le sort,	
	Le sixième marqua le temps de son enfance ;	
	Le douzième fut pris par son adolescence.	
	Des sept parts de sa vie, une encore s'écoula,	
	Puis s'étant marié, sa femme lui donna	
	Cinq ans après un fils qui, du destin sévère	
	Reçut de jours hélas, deux fois moins que son père.	
	De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut.	
	Dis, toi qui sais compter, à quel âge il mourut !	

Cette épitaphe est celle du célèbre mathématicien Diophante. Elle signifie que Diophante passa la sixième partie de sa vie dans la jeunesse, et la douzième dans l'adolescence ; qu'après un septième de sa vie et cinq ans, il eut un fils qui mourut après avoir vécu la moitié de son père, et que ce dernier ne lui survécut que de quatre ans. Il faut trouver pour cela un nombre dont la sixième partie, la douzième, la septième, la moitié, jointes ensemble, en y ajoutant cinq et quatre, fassent le nombre lui-même. Ce nombre est 84.



Problème 22

Il y a trois Amours qui versent l'eau dans un bassin, mais inégalement. L'un le remplit en un sixième de jour, l'autre en quatre heures, et le troisième en une demi-journée. On demande combien de temps il faudra pour remplir le bassin, lorsqu'ils verseront tous trois de l'eau ?

(Notes et commentaires, page 61)



Ce problème est de même nature que celui du lion de bronze, que nous avons résolu précédemment, et qui est aussi tiré de l'*Anthologie* grecque. En supposant le jour divisé en douze heures, on trouvera que les trois Amours rempliront le bassin en $1/11^e$ de jour, ou un peu plus d'une heure.



Problème 23

La somme de 500 livres ayant été partagée entre quatre personnes, il se trouve que les deux premières ensemble ont eu 285 livres, la seconde et la troisième 220 livres, enfin la troisième et la quatrième 215 livres ; de plus, le rapport de la part de la première à celle de la dernière est de 4 à 3. On demande combien chacune a eu ?

(Notes et commentaires, page 62)

La solution de ce problème est des plus faciles. La première a eu 160 livres, la seconde 125, la troisième 95, et la quatrième 120.

Il faut remarquer que, sans la dernière condition, ou une quatrième quelconque, le problème serait indéterminé, c'est-à-dire qu'on pourrait y satisfaire d'une infinité de manières : c'est cette dernière condition qui limite la solution à une seule.



Problème 24

Une femme de campagne porte des œufs au marché dans une ville de guerre où il y a trois corps de garde à passer. Au premier, elle laisse la moitié de ses œufs et la moitié d'un ; au second, la moitié de ce qui lui restait et la moitié d'un ; au troisième, la moitié de ce qui lui restait et la moitié d'un ; enfin elle arrive au marché avec trois douzaines.

Comment cela peut-il se faire sans rompre aucun œuf ?

(Notes et commentaires, page 62)



Il semble, du premier abord, que ce problème soit impossible ; car comment donner une moitié d'œuf sans en casser aucun ? Cependant on en verra la possibilité, quand on considérera que, lorsqu'on prend la moitié d'un nombre impair, on en prend la moitié exacte plus un demi. Ainsi on trouvera qu'avant le passage du dernier guichet, il restait à la femme 73 œufs ; car, en ayant donné 37, qui est la moitié plus la moitié d'un, il lui en est resté 36. De même, avant le deuxième guichet, elle en avait 147 ; et avant le premier, 295.

On peut proposer le problème autrement. Un homme est sorti de chez lui avec une certaine quantité de louis pour faire des emplettes. À la première, il dépense la moitié de ses louis et la moitié d'un ; à la seconde, il dépense aussi la moitié de ses louis et la moitié d'un ; à la troisième, pareillement ; et il rentre chez lui en ayant dépensé tout son argent, et sans avoir jamais changé de l'or pour de l'argent.

Réponse : cet homme avait 7 louis, et à la première emplette il en a dépensé 4 ; à la seconde, 2 ; à la troisième, 1 ; car 4 est la moitié de 7, plus un demi ; le restant étant 3, la moitié est un et demi ; et



conséquemment 2 excède cette moitié de un demi ; le restant est enfin 1 ; or la moitié d'un plus un demi est égal à 1 ; conséquemment il ne reste plus rien.

Remarque.

Si le nombre d'emplètes après lesquelles notre homme a dépensé tout son argent était plus grand, il n'y aurait qu'à faire une puissance de 2, dont l'exposant fût égal au nombre d'emplètes, et la diminuer d'une unité. Ainsi, s'il y en avait 4, la quatrième puissance de 2 étant 16, le nombre cherché serait 15 ; s'il y en avait 5, la cinquième puissance de 2 étant 32, le nombre cherché serait 31.

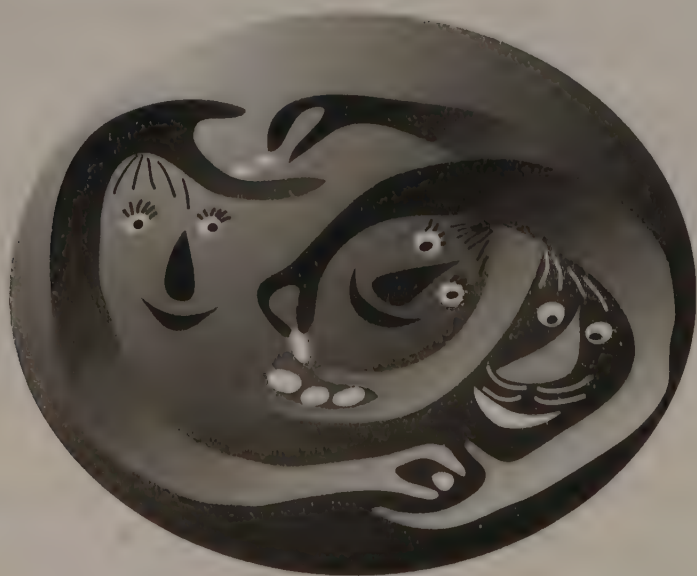
Problème 25

Trois personnes ont un certain nombre d'écus chacune. Il est tel que, la première en donnant aux deux autres autant qu'elles en ont chacune, la seconde pareillement en donnant à chacune des deux autres autant qu'elle en a, enfin la troisième faisant la même chose, elles se trouvent en avoir autant l'une que l'autre, à savoir 8.

Quelle est la somme qu'a chacune de ces personnes ?

(Notes et commentaires, page 63)

La première en avait 13, la seconde 7, et la troisième 4 ; ce qui est aisé à démontrer, en distribuant les écus de chaque personne suivant l'énoncé du problème.



Problème 26

Un Marchand de vin n'a que deux sortes de vin, qu'il vend l'une 10, l'autre 5 sous la bouteille. On lui demande du vin à 8 sous. Combien faut-il de bouteilles de chaque espèce, pour en former un qui revienne à 8 sous la bouteille ?

(Notes et commentaires, page 63)

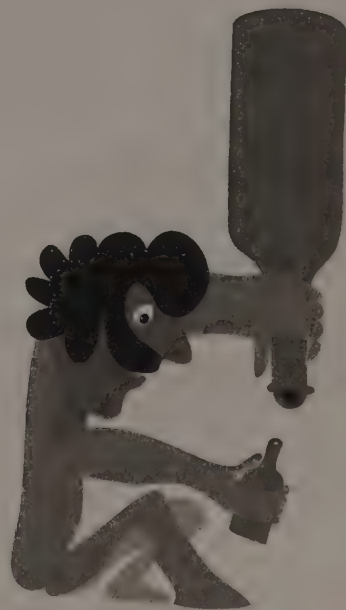
La différence du plus haut prix, 10 sous, au prix moyen demandé, est 2 ; et celle de ce prix moyen au prix le plus bas, est 3 : ce qui montre qu'il faut qu'il prenne trois bouteilles de vin du plus haut prix et deux du moindre. Avec ce mélange il fera cinq bouteilles, qui lui reviendront à 8 sous chacune.

En général, dans ces sortes de règles d'alliage, comme la différence du plus haut prix avec le prix moyen, est à la différence du moyen avec le plus bas, ainsi le nombre de mesures du plus bas prix, est celui des mesures du plus haut, qu'il faut mélanger ensemble pour avoir une pareille mesure au prix moyen.

Problème 27

Un sommelier infidèle, à chaque fois qu'il va à la cave, vole une pinte d'un tonneau particulier qui contient cent pintes, et la remplace par une égale quantité d'eau. Après un certain temps, par exemple trente jours, on s'aperçoit de sa friponnerie ; on le chasse. Mais on demande quelle est la quantité de vin qu'il a prise, et celle qui reste dans le tonneau ?

(Notes et commentaires, page 64)



Il est aisé de voir qu'il n'a pas pris 30 pintes ; car, dès la seconde fois qu'il puise dans le tonneau, et qu'il prend un centième de ce qu'il contient, il y avait déjà une pinte d'eau ; et comme chaque jour il substitue à ce qu'il prend une pinte d'eau, chaque jour aussi il vole moins d'une pinte de vin. Il est donc question, pour résoudre le problème, de déterminer dans quelle progression décroît le vin qu'il vole à chaque fois.



Pour y parvenir, je remarque qu'après l'extraction de la première pinte de vin, il n'en reste dans le tonneau que 99, et la pinte d'eau qui y a été versée ; donc, lorsqu'on tire une pinte du mélange, on ne tire en effet que les $99/100^e$ d'une pinte de vin : mais il y avait auparavant 99 pintes de vin ; donc, après cette extraction, il ne restera que 99 pintes moins $99/100$, c'est-à-dire $9801/100$, ou 98 pintes plus $1/100^e$. À la troisième extraction, la quantité de vin contenue dans la pinte tirée, sera seulement $98/100 + 1/10000$; ce qui, étant ôté de la quantité de vin qu'il y avait, à savoir $9801/100$; fera $970299/10000$, ou 97 pintes et $299/10000$.

On doit présentement remarquer que $9801/100$ est le carré de 99, divisé par 100, et que $970299/10000$ est le cube de 99, divisé par le carré de 100, etc. Conséquemment, après la seconde extraction, la quantité de vin restante sera le carré de 99, divisé par la première puissance de 100 ; après la troisième, ce sera le cube de 99, divisé par le carré de 100, etc. : d'où il suit qu'après la trentième extraction, la quantité de vin restante sera la trentième puissance de 99, divisée par la vingt-neuvième puissance de 100. Or on trouve, par le moyen des logarithmes, que cette quantité est $73 \text{ \& } 97/100$: conséquemment la quantité de vin prise est $26 \text{ \& } 3/100$.

Problème 28

Il y a trois ouvriers que j'appelle Jacques, Jean, et Pierre. Les deux premiers, travaillant ensemble, ont fait un certain ouvrage en huit jours, Jacques et Pierre n'ont pu le faire qu'en neuf jours, et les deux derniers n'en ont fait un semblable qu'en dix jours. Il est question de déterminer combien chacun mettrait à faire le même ouvrage.

(Notes et commentaires, page 64)

Le premier le fera en 14 jours et $34/49$, le second en 17 et $23/41$, et le troisième en 23 jours et $7/31$.



NOTES ET COMMENTAIRES – problèmes 14 à 28

problème 14

- L'analyse du problème n'est pas vraiment écrite par Ozanam ; elle est cependant intéressante car on est d'abord étonné de pouvoir trouver, à la fois, le bien du père et le nombre de ses enfants.

Le calcul apporte une autre surprise de taille : il suffit d'écrire les deux équations correspondant aux 2 premiers enfants (et l'égalité de leur héritage) pour trouver toutes les inconnues du problème ; les héritages des autres enfants sont alors entièrement déterminés, les soi-disant « données » de l'énoncé à leur sujet n'étant que des conséquences du partage équitable.

- Appelons x le « bien » du père. La part de chacun des enfants est alors successivement : $a = 1 + (x - 1)/7$ pour le premier, en prenant pour unité la dizaine de milliers de livres, et $b = 2 + (x - a - 2)/7$ pour le deuxième. Ces deux premiers enfants, déjà, doivent avoir la même part.

Réécrivons les égalités sans fractions :

$$7a = 7 + (x - 1)$$

$$49b = 98 + (7x - 7a - 14) = 98 + 7x - (7 + x - 1) - 14 = 78 + 6x.$$

Mais puisque chaque enfant reçoit finalement la même somme,

$$49a = 49 + 7x - 7 = 49b = 78 + 6x.$$

D'où $x = 36$ et $a = 6$.

problème 15

- Il y a deux nombres inconnus : le nombre de pauvres, n , et la somme initiale dans la bourse, s . La phrase « en donnant à chacun neuf sous, il en a trente-deux de moins qu'il ne faut » se traduit par $9n = 32 + s$.

La phrase « en en donnant à chacun sept, il lui en reste vingt-quatre » se traduit par $7n + 24 = s$. On a donc, en remplaçant, dans la première équation, s par sa valeur donnée par la seconde : $9n = 32 + (7n + 24)$. D'où $2n = 56$ et $n = 28$. Et finalement $s = 220$. La réponse est 220 sous.

problème 16

- La correction d'Ozanam est très détaillée...

Le seul calcul qui serait à compléter est celui de 288/61 heures, pour lequel Ozanam donne non seulement les minutes et les secondes, mais aussi les tierces ! (1 seconde = 60 tierces.)



problème 17

- L'argumentation de Jacques Ozanam est particulièrement intéressante, car elle montre bien comment on peut se passer de toute traduction algébrique ; il faut cependant une grande intuition pour choisir les bonnes informations dans le bon ordre.

- La traduction algébrique est moins brillante, mais on est plus assuré d'aboutir sans difficulté. Appelons m la charge du mulet et a celle de l'âne. Le mulet dit : « Si tu me donnes un des sacs que tu portes, j'en aurais le double des tiens. »

Cela peut se traduire par : $m + 1 = 2(a - 1)$, ou bien $m = 2a - 3$.

« Mais si je t'en donnais un des miens, nous en aurions seulement autant l'un que l'autre. »

Cela peut se traduire par : $m - 1 = a + 1$, ou bien $m = a + 2$.

On en déduit que $2a - 3 = a + 2$, d'où $a = 5$.

Et finalement $m = 7$.

problème 18

Ici, Ozanam ne donne aucune argumentation pour trouver le résultat...

- Appelons donc G le nombre d'oranges de chaque Grâce et n le nombre que chacune donne à chaque Muse.

Après le don des Grâces, chaque Grâce a $G - 9n$ oranges, et chaque Muse en a $3n$. On a $G - 9n = 3n$, d'où $G = 12n$.

Une solution est donc : chaque Grâce avait $12n$ oranges, chacune en a donné n à chaque Muse et, alors, chacune, Muse ou Grâce, en a $3n$.

Le nombre n peut être choisi comme on le veut, la moindre valeur étant 1 !

problème 19

- Le nombre cherché N vérifie : $N = N/2 + N/4 + N/7 + 3$, soit en multipliant tout par 28 : $28N = 14N + 7N + 4N + 84$.

D'où $3N = 84$ et finalement $N = 28$.

Sur ces 28 disciples, 14 étudient les maths, 7 la physique, 4 méditent en silence et 3 sont des femmes.

Pour que le problème ait une solution, il faut considérer que les 4 groupes sont disjoints. À chacun d'interpréter cet exercice comme la confirmation d'un anti-féminisme primaire et pythagoricien (les femmes ne font ni des maths, ni de la physique, ni de la méditation !) ou le contraire (il y a « tout de même » des femmes !).



problème 20

- Le jour était traditionnellement divisé en 12 heures, chaque heure d'été étant alors évidemment plus longue que chaque heure d'hiver...

Si H heures sont passées, il reste au jour $12 - H$ heures, nombre égal d'après l'énoncé à $4H/3$.

D'où $36 - 3H = 4H$ et $H = 36/7 = 5 + 1/7$.

- L'auteur de cet exercice n'a pas cherché à simplifier les calculs et en a fait un exercice sur les fractions d'heure. Plus didactique aurait été l'énoncé : « On demande quelle heure il est ; et l'on répond que ce qui reste du jour est le double des heures déjà écoulées. »

problème 21

- Cette épitaphe, citée en latin dans le livre d'Ozanam, est ici traduite en français et en alexandrins telle que nous l'avons trouvée dans les *Récréations arithmétiques* d'Émile Fourrey (1899) ; avec toutes les excuses de l'éditeur pour cet anachronisme.

- Les données de l'énoncé se traduisent par :

$$x = x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4,$$

soit, en multipliant par le dénominateur commun 84 :

$$84x = 14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336.$$

$$\text{Et } 84x = 75x + 756$$

$$9x = 756$$

$$x = 84.$$

Ainsi Diophante serait mort à 84 ans.

problème 22

- En un jour, le premier Amour remplit 6 bassins, le deuxième 3 (4 heures vaut $1/3$ jour) et le troisième 2.

À eux trois ils remplissent donc 11 bassins en 1 jour.

Il leur faut donc $1/11$ ème de jour pour remplir le bassin.

- Là encore l'auteur du problème semble avoir cherché la complication pour mieux piéger le lecteur (le deuxième Amour aurait pu remplir le bassin en trois heures, s'il en avait été vraiment un !).



problème 23

- La dernière remarque date évidemment de l'édition de 1778 ; elle met l'accent sur les préoccupations de l'époque, concernant les systèmes d'équations linéaires. Les études de Vandermonde, et surtout le récent livre de Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, publié en 1750, avait alors popularisé les notions d'indépendance et de degrés de liberté chez les mathématiciens.

- En appelant x, y, z, t les sommes reçues par chaque personne, le système à résoudre est :

$$\begin{cases} x + y & = 285 \\ y + z & = 220 \\ z + t & = 215 \\ 3x & - 4t = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la 2^e équation de la somme de la 1^{re} et de la 3^e, on a
$$x + t = 280.$$

On peut alors remplacer x par $280 - t$ dans la 3^e équation :

$$4t = 840 - 3t, \text{ d'où } 7t = 840 \text{ et } t = 120.$$

Finalement :

$$x = 280 - 120 = 160,$$

$$y = 285 - 160 = 125 \text{ et}$$

$$z = 220 - 125 = 95.$$

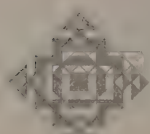
problème 24

- Les problèmes sur les moitiés et plus généralement sur les fractions d'œufs ont toujours passionnés les amateurs de petits problèmes amusants, surtout quand il n'est pas nécessaire de casser les œufs.

- La solution se trouve, naturellement, en commençant par la fin : en arrivant au marché, il reste 36 œufs à la fermière ; elle vient alors de donner la moitié de ce qu'elle avait plus $1/2$; c'est donc qu'elle avait $2 \times (36 + 1/2)$, soit 73 œufs.

Au précédent corps de garde elle en avait $2 \times (73 + 1/2)$, soit 147.

Et au début elle en avait $2 \times (147 + 1/2)$, soit 295.



problème 25

• Encore un exercice où la difficulté réside d'abord dans la traduction algébrique des termes de l'énoncé. Si x, y, z sont les nombres d'écus d'abord possédés par chacune des personnes,

... *la première* en donnant aux deux autres autant qu'elles en ont chacune, elles se trouvent respectivement avec $x - y - z, 2y, 2z$;

... *la seconde* pareillement en donnant à chacune des deux autres autant qu'elle en a, elles se trouvent alors avec $2x - 2y - 2z, 2y - (x - y - z + 2z)$ soit $3y - x - z, 4z$;

... *la troisième faisant la même chose*, elles se trouvent finalement chacune avec $4x - 4y - 4z, 6y - 2x - 2z, 4z - (2x - 2y - 2z + 3y - x - z)$ soit $7z - x - y$.

On a donc finalement $8 = 4x - 4y - 4z = 6y - 2x - 2z = 7z - x - y$.

La résolution du système d'équations n'est pas, non plus, très simple...

Réécrivons-le dans un bon ordre :

$$\begin{aligned}x - y - z &= 2 \\ -x + 3y - z &= 4 \\ -x - y + 7z &= 8.\end{aligned}$$

En ajoutant les deux premières équations, on a $2y - 2z = 6$;

et en soustrayant les deux dernières, on obtient $4y - 8z = -4$.

D'où $y - z = 3$ et $y - 2z = -1$.

Alors, par soustraction $z = 4$.

D'où $y = 3 + z = 7$, et finalement $x = 2 + y + z = 13$.

problème 26

• Voici une application de ce qu'on appelle aujourd'hui du nom barbare de « barycentre », mot qui signifie simplement que la situation ressemble à ce qui se passe sur le plateau d'une balance à bras inégaux (c'est-à-dire une balance romaine).

• Pour nous qui ramenons plutôt les choses à de l'algèbre, appelons c la quantité de vin (cher) à 10 sous, et b la quantité de vin (bon marché) à 5 sous ; on veut avoir la relation : $10c + 5b = 8(b + c)$. Les nombres b et c sont évidemment déterminés à un coefficient près ; si l'on choisit $c = 1$, on trouve $b = 2/3$ (c'est la proportion de vin bon marché qu'il faut prendre pour une unité de vin cher). On peut aussi prendre 3 bouteilles de vin cher pour 2 bouteilles de vin bon marché...



problème 27

• Lorsque dans une certaine boisson, on remplace une proportion p par de l'eau, la concentration en boisson pure est multipliée par $1 - p$. Si on recommence, la concentration devient $(1 - p) \times (1 - p)$, soit $(1 - p)^2$; et si on opère n fois, la concentration devient $(1 - p)^n$.

Le problème, ici, est de calculer $(1 - 1/100)^{30} \times 100$, soit $99^{30}/100^{29}$. Pour ce calcul, Ozanam utilise les logarithmes ; aujourd'hui nous avons des calculatrices... Pour 99^{30} ma calculatrice affiche 7.397 E 59, et je peux donc prendre $99^{30} = 7,4 \times 10^{59}$. D'où le résultat $7,4 \times 10^{59}/10^{58} = 74$. Après 30 jours de vol, la proportion de vin restant est de 74 %, et la proportion de vin volé est de 26 %.

problème 28

• Appelons q le nombre de jours que mettrait Jacques pour réaliser l'ouvrage tout seul, et respectivement n pour Jean et p pour Pierre. Chaque jour, Jacques réalise donc la fraction $1/q$ de l'ouvrage (respectivement Jean $1/n$ et Pierre $1/p$).

On a alors : $1/q + 1/n = 1/8$, $1/q + 1/p = 1/9$, $1/p + 1/n = 1/10$.

En soustrayant les deux premières équations, il vient $1/n - 1/p = 1/72$.

Alors, par addition $2 \times 1/n = 1/10 + 1/72$ d'où $1/n = 41/720$.

Et par soustraction $2 \times 1/p = 1/10 - 1/72$ d'où $1/p = 31/720$.

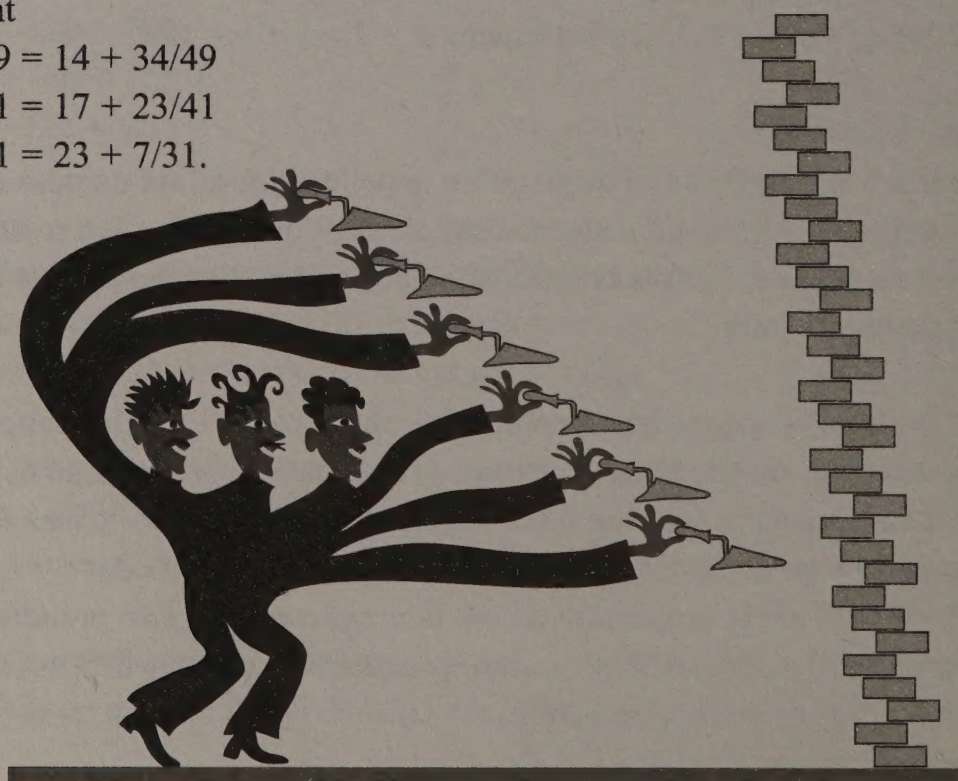
$1/q = 1/8 - 1/n = 90/720 - 41/720 = 49/720$.

Finalement

$$q = 720/49 = 14 + 34/49$$

$$n = 720/41 = 17 + 23/41$$

$$p = 720/31 = 23 + 7/31.$$



Jacques OZANAM - Récréations mathématiques

Ce petit livre voudrait offrir, à son lecteur, un plaisir simple et bien naturel : celui du retour aux sources.

En effet, beaucoup de problèmes, que l'on trouve aujourd'hui dans les livres ou sur les sites de divertissements mathématiques, sont « vieux comme le monde ».

Jacques Ozanam (1640-1717), dont nous reproduisons ici quelques extraits des *Récréations mathématiques et physiques*, n'était déjà pas le premier : il connaissait évidemment les *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet de Méziriac (1612), qui connaissait ceux de Chuquet (*Triparty en la science des nombres*, 1484), qui connaissait ceux des mathématiciens indiens ou arabes, et les *Propositions pour aiguïser l'intelligence des jeunes* de Alcuin (735-804) qui, lui-même, n'ignorait certainement pas les épigrammes qui deviendront l'*Anthologie grecque* ou les problèmes des *Arithmétiques* de Diophante...

Voici donc une lecture au plus près des sources de l'Histoire, d'autant plus agréable que le style, mais aussi la langue et l'écriture en sont, tout à la fois, justes et savoureuses.

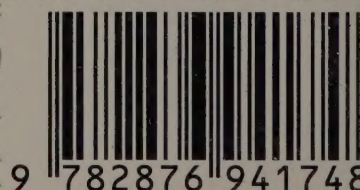
Les Classiques Kangourou

Cette collection voudrait, à l'instar des « petits classiques littéraires » témoigner de l'ouverture des mathématiques à l'histoire et à sa lecture intelligente. Les *classiques Kangourou* proposent une approche complémentaire au parcours scolaire standard avec l'ambition de faire partager, à tous, le plaisir d'une vraie culture humaniste.

OZANAM - Récréations mathématiques
Les classiques Kangourou n°2

ISBN : 978-2-87694-174-8

5 €



KS-604-832